

École de technologie supérieure  
Service des enseignements généraux

ING160

# THERMODYNAMIQUE ET MÉCANIQUE DES FLUIDES

Notes de cours

Adile Benmassaoud  
André Bordeleau  
Éric David

Avril 2020



## **Remerciements**

Je tiens à remercier mes collègues du Service des enseignements généraux de l'École de technologie supérieure de Montréal dont les conseils m'ont été précieux durant cet exercice de réécriture des notes de cours que vous avez entre les mains. Je tiens à souligner de façon plus particulière les apports de MM. Alain Hénault et Jean-Sébastien Closson-Duquette ; je leur sais gré pour leurs suggestions et lecture attentive.

Bonne lecture !!

André Bordeleau



## **1<sup>ere</sup> PARTIE**

# **LA MÉCANIQUE DES FLUIDES**



# CHAPITRE 1

## LES FLUIDES ET LEURS PROPRIÉTÉS

### Table des matières

<b>1.1</b>	<b>Définition d'un fluide</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Propriétés des fluides</b>	<b>4</b>
1.2.1	Masse volumique	4
1.2.2	Densité	5
1.2.3	Viscosité	5
1.2.4	Module de volume	13
1.2.5	Loi des gaz parfaits	14
<b>1.3</b>	<b>Pressions absolue et relative</b>	<b>16</b>
<b>1.4</b>	<b>Loi de Pascal</b>	<b>16</b>
<b>1.5</b>	<b>Variation de pression dans un fluide au repos</b>	<b>18</b>
1.5.1	Le cas de masse volumique uniforme	19
1.5.2	Le cas de masse volumique variable dans les gaz	20
<b>1.6</b>	<b>EXERCICES</b>	<b>25</b>





## 1.1 Définition d'un fluide

La matière se présente sous trois formes : les états solide, liquide et gazeux. Lorsque la matière se présente à l'état liquide ou gazeux, on dit qu'elle constitue un fluide. Afin de se doter d'une définition formelle de la notion de fluide considérons l'expérience imaginaire suivante. Un bloc solide et un bloc fluide sont tous deux extraits de leur milieu respectif (figure 1.1). On applique une contrainte de cisaillement  $\tau$  à chacun.

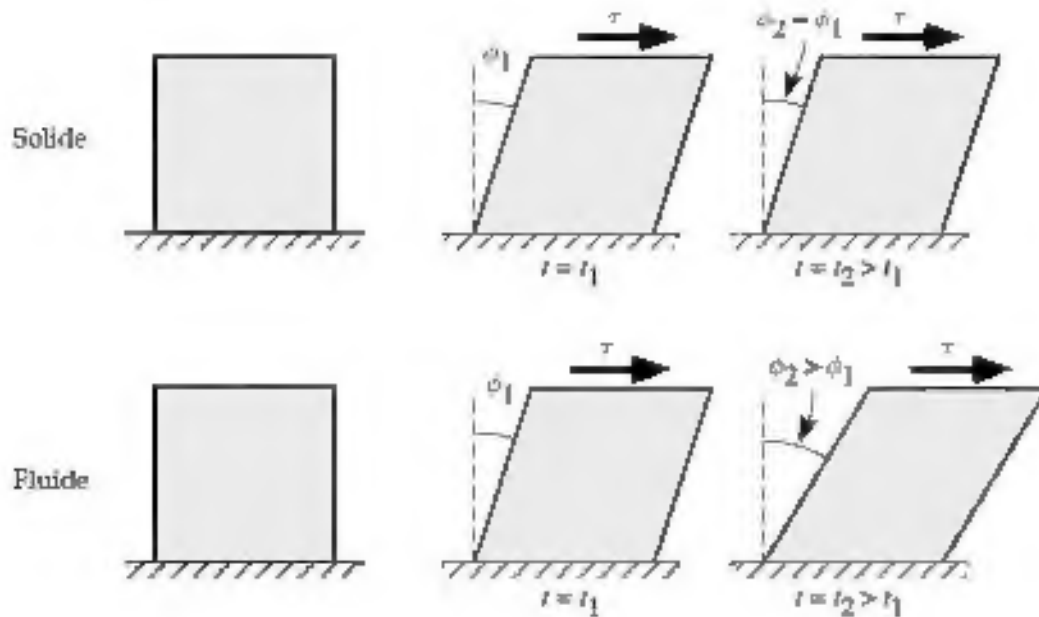


Figure 1.1 Comportements distincts de blocs solide et fluide

Le solide se déforme, son arête faisant  $\phi_1$  par rapport à son orientation initiale. Si la contrainte est maintenue, on observe que la déformation reste la même c'est-à-dire que  $\phi_1 = \phi_2$  (dans la mesure où la limite élastique n'est pas dépassée). Si on retire la contrainte, le bloc solide reprend sa forme originelle.

Dans le cas du fluide toutefois, on remarque que si à  $t_1$  l'angle de déformation est  $\phi_1$ , le maintien de la contrainte accentuera la déformation de sorte qu'à  $t_2$  l'angle  $\phi_2$  sera plus grand que  $\phi_1$ . On dira que le fluide s'est écoulé. C'est cette différence de comportement en présence d'une contrainte de cisaillement qui différencie les fluides des solides.

## 1.2 Propriétés des fluides

### 1.2.1 Masse volumique

La masse volumique d'un fluide, symbolisée par le lettre grecque  $\rho$  (rho), est définie comme une masse par unité de volume.

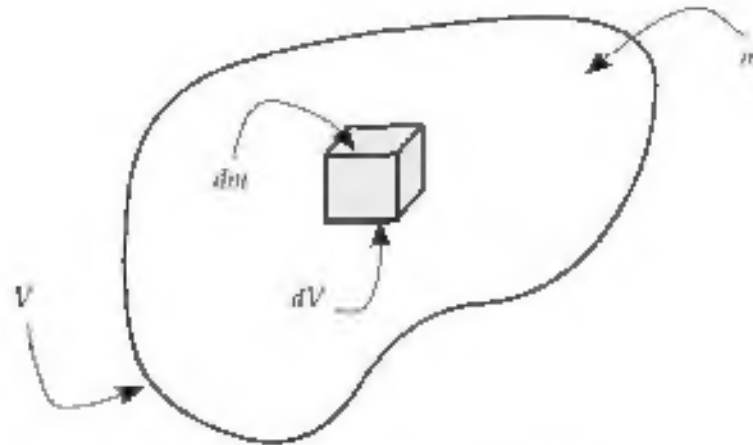


Figure 1.2 Définition de la masse volumique

Si d'une masse de fluide  $m$  on extrait un bloc infinitésimal de volume  $dV$  et de masse  $dm$ , alors la masse volumique est définie par :

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (1-1)$$

La masse totale se calcule alors par :

$$m = \int_V \rho dV$$

Toutefois, si la masse volumique est uniforme sur l'ensemble du volume occupé par le fluide on a :

$$m = \rho V \quad (1-2)$$

Dans le système international, S.I., la masse volumique s'exprime en  $\text{kg}/\text{m}^3$ . Elle varie en fonction de la nature du fluide et des conditions de température et de pression. À  $T = 4^\circ\text{C}$  et  $P = 101,3 \text{ kPa}$  :

$$\rho_m = 1,27 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$\rho_{\text{mercure}} = 13600 \text{ kg}/\text{m}^3$$

La masse volumique d'un fluide peut être affectée de façon appréciable par une modification de pression à laquelle il est assujéti. L'effet est très marqué chez les gaz mais beaucoup moins pour les liquides. Lorsque cette variation de pression n'induit pas de variation de masse volumique (ou que celle-ci est jugée négligeable pour les besoins du calcul), on dit du fluide qu'il est **incompressible**. Les liquides sont donc souvent considérés comme étant incompressibles. Le tableau 1.1 donne, entre autres, la masse volumique de l'eau et de certains liquides usuels en fonction de la température à pression atmosphérique.

### 1.2.2 Densité

La densité  $\sigma$  d'un fluide est le rapport entre la masse volumique de celui-ci et celle d'un fluide de référence: c'est un paramètre sans dimension.

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \quad (1.3)$$

Selon que l'on parle de liquide ou de gaz, le fluide référence utilisé différera. En effet, le fluide de référence employé

$\sigma_l$  pour les liquides est l'eau à 4°C et 101,3 kPa,  $\rho_{ref} = 1000 \text{ kg/m}^3$

$\sigma_g$  pour les gaz est l'air à 4°C et 101,3 kPa,  $\rho_{ref} = 1,27 \text{ kg/m}^3$ .

**Exemple 1.1** pour le mercure, un métal liquide,

$$\sigma_{Hg} = \frac{\rho_{Hg}}{\rho_{ref}} = \frac{13600}{1000} = 13,6$$

### 1.2.3 Viscosité

#### *Description du phénomène*

Tous les fluides ne s'écoulent pas aussi facilement sous l'action d'une contrainte de cisaillement. Certains comme l'eau s'écoulent aisément alors que d'autres comme le goudron ou certaines huiles ne s'écoulent que difficilement. La propriété des fluides qui caractérise cette propension à l'écoulement est la viscosité ( $\mu$ ). Afin de pouvoir la définir correctement on doit d'abord discuter d'une autre notion, celle du profil de vitesse qui s'établit dans un écoulement.

Lorsqu'un fluide est en contact avec une surface solide, la vitesse du fluide à la surface de contact est la même que la vitesse du solide. En d'autres termes, la couche de fluide en contact avec la surface solide ne se déplace pas relativement à celle-ci (condition de non glissement). On verra alors se développer un « profil de vitesse » à travers le corps du fluide. La figure 1.3 présente deux exemples de cet état de choses.

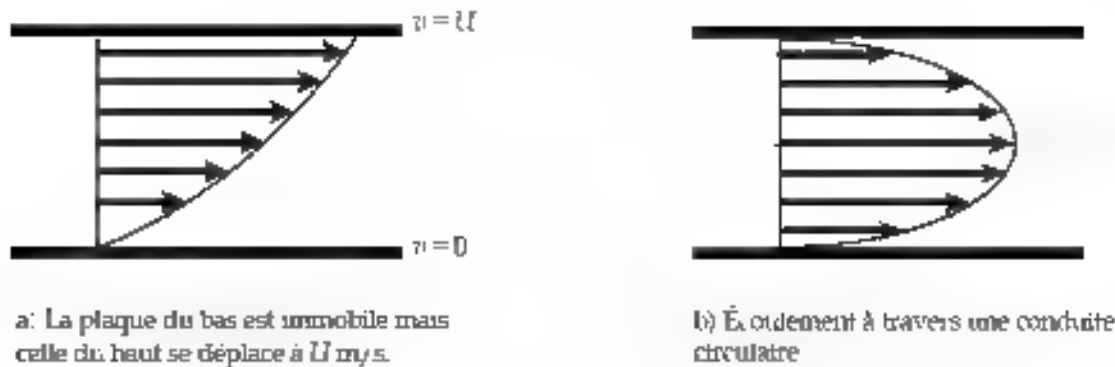


Figure 1.3 Profils de vitesse

Quels sont les mécanismes physiques qui sont à l'origine des effets visqueux observés? Considérons d'abord deux couches de liquide adjacentes se déplaçant respectivement à  $v$  et  $v + \Delta v$  (figure 1.4)

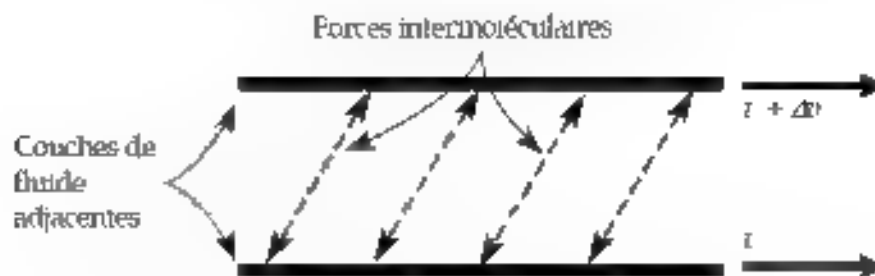


Figure 1.4 Effet des forces intermoléculaires sur la viscosité

Les forces intermoléculaires attractives agissent de façon à entraîner la couche la plus lente et retenir la couche la plus rapide. C'est le mécanisme qui est responsable des effets de frottement pour les liquides en situation d'écoulement laminaire, ordonné.

Dans les gaz, toutefois, les distances intermoléculaires sont trop grandes pour que les forces d'attraction (de nature électrique) jouent un rôle prépondérant. Un autre mécanisme doit être à l'origine des effets visqueux.

La figure 1.5 illustre deux couches de gaz adjacentes en écoulement. Bien que le déplacement global se effectue de gauche à droite, il y a toujours un transfert de masse entre les couches qui s'opère à l'échelle moléculaire (microscopique). Ce transfert de masse s'accompagne d'un transfert de quantité de mouvement qui aura pour effet d'accélérer la couche la plus lente et de ralentir la couche la plus rapide. (Pensez au résultat du lancer de sacs de sable d'un chariot rapide vers un chariot lent et vice-versa). C'est le mécanisme qui est principalement responsable du frottement visqueux chez les gaz.

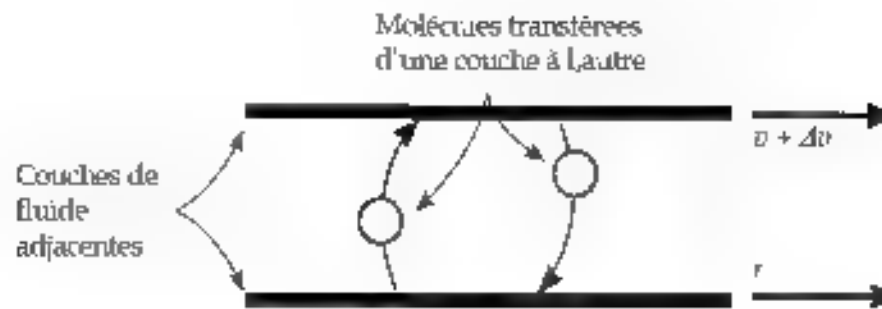


Figure 1.5 Frottement visqueux dans les gaz

Si l'échange de matière entre les couches se fait à l'échelle macroscopique, l'effet de frottement en est d'autant augmenté (c'est ce mécanisme que nous invoquerons au chapitre 6 pour caractériser les effets visqueux dans les cas d'écoulements turbulents désordonnés).

### Loi de Newton

Soit un milieu fluide présentant un certain profil de vitesse  $v(y)$  (figure 1.6).

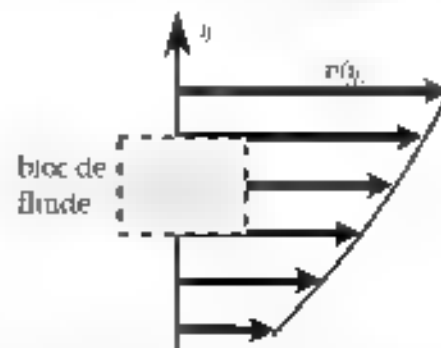
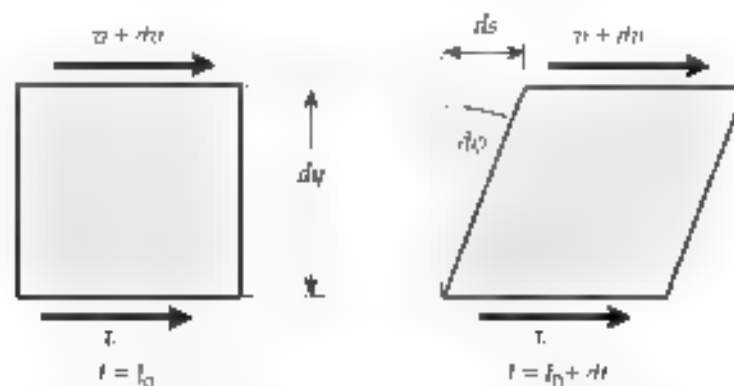


Figure 1.6 Portion d'un fluide en écoulement

Examinons le comportement d'un bloc de fluide entre les instants  $t_0$  et  $t_0 + dt$ . La figure 1.7 illustre la situation.

Figure 1.7 Déformation d'un élément de fluide durant l'intervalle de temps  $dt$

La couche supérieure du bloc se déplace plus rapidement que la couche inférieure et cause la déformation du bloc. L'arête de gauche du bloc effectue donc une rotation de  $d\phi$  alors que le coin supérieur gauche se déplace de  $ds$ . On veut établir le taux de variation de  $d\phi$ .

$$ds = [(v + dv) - v] dt$$

Or :

$$\tan(d\phi) = \frac{ds}{dy}$$

Comme l'angle est très petit,

$$\tan(d\phi) = d\phi = \frac{ds}{dy} = \frac{dv}{dy} dt$$

Donc

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{dv}{dy}$$

La plupart des fluides communs, l'air et l'eau en sont des exemples, présentent la caractéristique que la contrainte de cisaillement  $\tau$  est proportionnelle au taux de déformation  $\frac{dv}{dy}$ . Ce sont les « fluides newtoniens ». Alors

$$\tau \propto \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}$$

Ainsi

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (1-4)$$

où  $\mu$  est la viscosité absolue (ou dynamique). Dans le Système International d'unités (SI), la viscosité dynamique s'exprime en Pa.s.

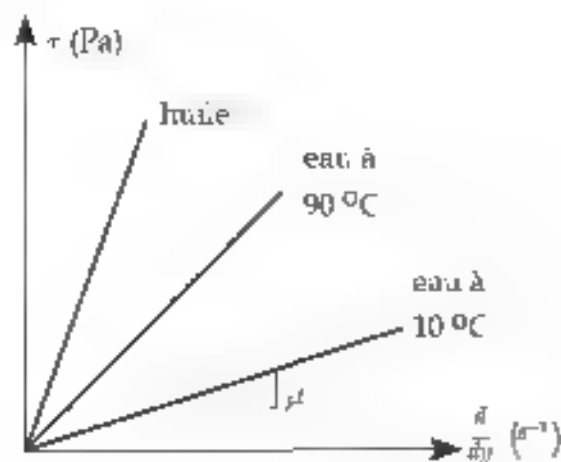
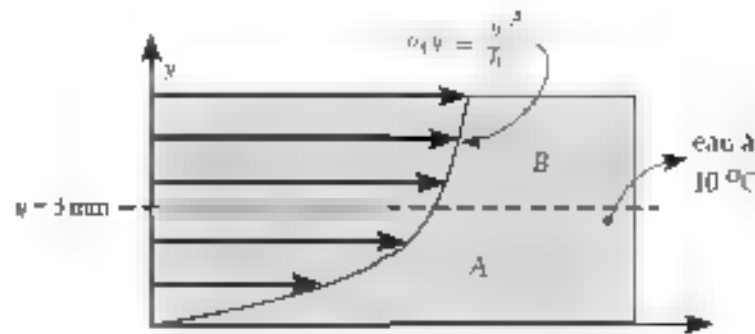


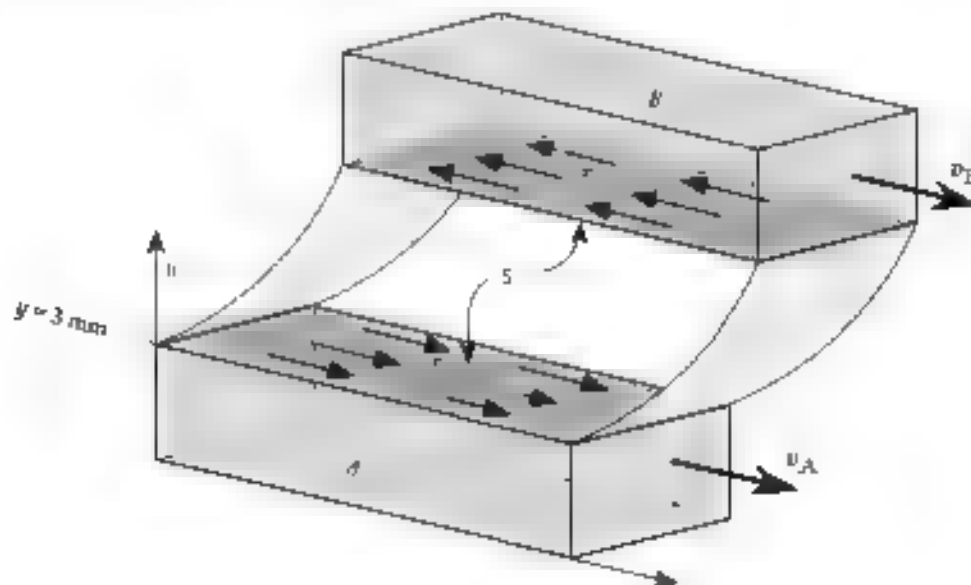
Figure 1.8 Contraintes de cisaillement en fonction du taux de déformation pour des fluides newtoniens

## Exemple 1.2



De l'eau à  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$  en écoulement présente le profil de vitesse présenté à la figure ci-dessus où  $\tau = 7\text{ mm}$ . Quelle est la force exercée par la portion inférieure du fluide (région A) sur la portion supérieure (région B) en  $y = 3\text{ mm}$  si la surface de contact entre les blocs S est de  $0.5\text{ m}^2$ ?

**Solution** Du fait du profil de vitesse spécifique, on observe que la couche de fluide juste au-dessus de  $y = 3\text{ mm}$  (région B) se déplace plus rapidement que la couche juste en-dessous (région A). Si on procède à une séparation imaginaire des deux blocs, on aurait quelque chose qui présente la allure de la figure ci-dessous où sont montrées les contraintes agissant sur chacun des blocs.



Désignons par  $F_{A \rightarrow B}$  la force exercée par le bloc A sur le bloc B. On observe que cette force est orientée en direction de  $\tau$  négatif (la matière en-dessous cherche à retenir le bloc B)

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow B} = F_{A \rightarrow B} \mathbf{i}$$

où

$$F_{A \rightarrow B} = \tau S$$

et

$$\tau(y = 3\text{ mm}) = \mu \frac{dv_x}{dy} \bigg|_{y=3\text{ mm}}$$

Ainsi

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dy} = 3\mu \frac{v_x'}{h^2}$$

$$\tau_{\theta} = 3 \text{ mm} = 3 + 1,31 \times 10^{-3} + \frac{0,003}{0,007^3} = 1,0312 \text{ Pa}$$

Alors

$$F_{A \rightarrow B} = \tau S = 1,0312 \times 0,5 = 0,5156 \text{ N}$$

En outre,

$$F_{A \rightarrow B} = 0,5156 \text{ N}$$

La troisième loi de Newton stipule que la force ressentie par *A* du fait de l'action de *B* sera l'inverse de ce résultat, c'est-à-dire

$$F_{B \rightarrow A} = -F_{A \rightarrow B} = +0,5156 \text{ N}$$

Notons que le sens de la contrainte (et donc, de la force) est établi par inspection du profil de vitesse.

*Cas d'un écoulement à travers une conduite à section circulaire*

Du fait de la symétrie axiale inhérente à la géométrie, la vitesse ne peut dépendre que de la distance par rapport au centre, c'est-à-dire  $v = v(r)$ . Se référant à la figure 1.9,

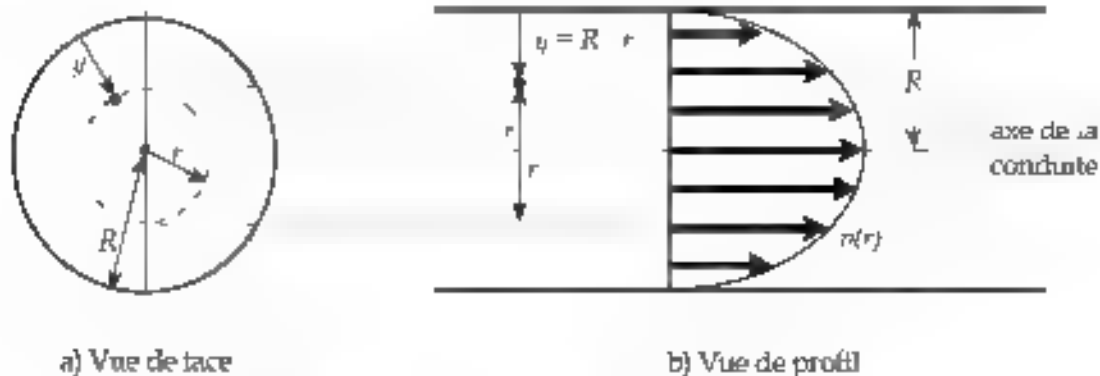


Figure 1.9 Définition des paramètres d'une conduite circulaire

$$y = R - r \Rightarrow dy = -dr$$

Alors :

$$\tau = \mu \frac{dv}{dr} \quad (1-5)$$

*Viscosité cinématique*

En mécanique des fluides on utilise aussi la **viscosité cinématique** symbolisée par la lettre  $\nu$  (nu), et définie par la relation suivante

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1-6)$$



Dans le S.I. la viscosité cinématique s'exprime en  $\text{m}^2/\text{s}$ . Les tableaux 1.1 et 1.2 présentent certaines des propriétés des liquides et gaz usuels.

Liquide	Température $T (^{\circ}\text{C})$	Masse volumique $\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	Densité $\sigma$	Viscosité absolue $\mu \text{ (Pa.s)}$	Viscosité cinématique $\nu \text{ (m}^2/\text{s)}$
eau	0	1000	1,000	1,79 E -3	1,79 E -6
	10	1000	1,000	1,31 E -3	1,31 E -6
	20	998	0,998	1,00 E -3	1,00 E -6
	30	996	0,996	798 E -4	8,01 E -7
	40	992	0,992	653 E -4	6,58 E -7
	50	988	0,988	547 E -4	5,48 E -7
	60	983	0,983	467 E -4	4,75 E -7
	70	978	0,978	404 E -4	4,13 E -7
	80	972	0,972	355 E -4	3,65 E -7
	90	965	0,965	315 E -4	3,26 E -7
	100	958	0,958	282 E -4	2,94 E -7
Mercure	0	13600	13,60	1,68 E -3	1,24 E -7
	4	13599	13,59		
	20	13550	13,55	1,55 E -3	1,14 E -7
	40	13480	13,48	1,45 E -3	1,07 E -7
	60	13450	13,45	1,37 E -3	1,02 E -7
	80	13400	13,40	1,30 E -3	9,70 E -8
	100	13350	13,35	1,24 E -3	9,29 E -8
Éthylène glycol	0			5,70 E -2	
	20	1110	1,11	1,99 E -2	1,79 E -5
	40	1110	1,10	9,13 E -3	8,30 E -6
	60	1090	1,09	4,95 E -3	4,54 E -6
	80	1070	1,07	3,02 E -3	2,82 E -6
	100	1060	1,06	1,99 E -3	1,88 E -6
Alcool méthylique (méthanol)	0	810	0,810	9,1 E -4	1,01 E -6
	10	801	0,801		
	20	797	0,797	8,51 E -4	7,37 E -7
	30	783	0,783	5,0 E -4	6,51 E -7
	40	774	0,774	4,50 E -4	5,81 E -7
	50	765	0,765	3,96 E -4	5,18 E -7

Tableau 1.1 Propriétés physiques de l'eau et de liquides usuels

Tableau 1.1 (suite)

Liquide	Température $T$ (°C)	Masses volumique $\rho$ ( $\text{kg/m}^3$ )	Densité $\sigma$	Viscosité absolue $\mu$ (Pa.s)	Viscosité cinématique $\nu$ ( $\text{m}^2/\text{s}$ )
Alcool Éthylique (éthanol)	0	806	0,806	$1,77 \text{ E }^{-3}$	$7,20 \text{ E }^{-6}$
	20	789	0,789	$1,20 \text{ E }^{-3}$	$1,52 \text{ E }^{-6}$
	40	772	0,772	$8,34 \text{ E }^{-4}$	$1,08 \text{ E }^{-6}$
	60	754	0,754	$5,92 \text{ E }^{-4}$	$8,5 \text{ E }^{-7}$
Octane normal	0	718	0,718	$7,06 \text{ E }^{-4}$	$9,83 \text{ E }^{-7}$
	16			$5,4 \text{ E }^{-4}$	
	20	702	0,702	$5,42 \text{ E }^{-4}$	$7,7 \text{ E }^{-7}$
	40	686	0,686	$4,33 \text{ E }^{-4}$	$6,31 \text{ E }^{-7}$
Benzène	0	900	0,900	$9,12 \text{ E }^{-4}$	$1,01 \text{ E }^{-6}$
	20	879	0,879	$6,52 \text{ E }^{-4}$	$7,4, \text{ E }^{-7}$
	40	858	0,857	$5,03 \text{ E }^{-4}$	$5,86 \text{ E }^{-7}$
	60	836	0,836	$3,92 \text{ E }^{-4}$	$4,69 \text{ E }^{-7}$
	80	815	0,815	$3,29 \text{ E }^{-4}$	$4,04 \text{ E }^{-7}$
Kerosene	18	841	0,841	$7,06 \text{ E }^{-3}$	$8,40 \text{ E }^{-6}$
	20	814	0,814	$1,90 \text{ E }^{-3}$	$7,37 \text{ E }^{-6}$
Huile lubrifiante	20	871	0,871	$1,31 \text{ E }^{-2}$	$1,50 \text{ E }^{-5}$
	40	858	0,858	$6,81 \text{ E }^{-3}$	$7,94 \text{ E }^{-6}$
	60	845	0,845	$4,8 \text{ E }^{-3}$	$4,95 \text{ E }^{-6}$
	80	831	0,832	$3,83 \text{ E }^{-3}$	$3,40 \text{ E }^{-6}$
	100	820	0,820	$2,00 \text{ E }^{-3}$	$2,44 \text{ E }^{-6}$
	120	809	0,809	$1,54 \text{ E }^{-3}$	$1,90 \text{ E }^{-6}$

Gaz	$M$ ( $\text{g/mol}$ )	$\rho$ ( $\text{kg/m}^3$ )	$\mu \cdot 10^{-10}$ (Pa.s)
Air	29,0	1,293	17,05
Monoxyde de carbone	28,0	1,250	16,6
Dioxyde de carbone	44,0	1,997	14,0
Hélium	4,00	0,179	9,1
Hydrogène	2,01	0,090	8,35
Méthane	16,0	0,717	10,3
Azote	28,0	1,250	16,7
Oxygène	32,0	1,429	19,2
Vapeur d'eau	18,0	0,600	9,7

Tableau 1.2 Propriétés de certains gaz usuels à  $P = 1 \text{ atm}$  et  $T = 273 \text{ K}$

### 1.2.4 Module de volume

La compressibilité des fluides, est caractérisée par le module de volume,  $K$ , défini comme suit

$$K = -V \frac{dP}{dV} = \frac{dP}{dV/V} \quad (1.7)$$

Afin de simplifier l'analyse réécrivons l'équation (1.7) en termes de variations linéaires (plutôt qu'infinitésimales)

$$\Delta P = K \frac{\Delta V}{V}$$

On voit qu'on peut considérer le module de volume  $K$  comme une mesure de la « rigidité » du fluide. En effet, sa grandeur détermine la variation de pression nécessaire ( $\Delta P$ ) à une variation relative de volume  $\Delta V/V$ . Plus la valeur de  $K$  est élevée, moins le fluide se comprime aisément. Dans le S.I. le module de volume  $K$  s'exprime en Pa. On peut réécrire 1.14 sous une autre forme. Se souvenant que

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$dV = -m \cdot \frac{d\rho}{\rho^2} \quad (\text{on présume que } m = \text{cte})$$

Alors, l'équation (1.7) devient

$$K = \rho \cdot \frac{dP}{d\rho} \quad (1.8)$$

Ce dernier résultat permet de prédire la masse volumique suite à une variation de pression à laquelle le fluide est soumis

Du fait de l'équation (1-8) on a

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = \int_{\rho_1}^{\rho_2} K \frac{d\rho}{\rho}$$

$$P_2 - P_1 = K \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (\text{on présume } K \text{ constant})$$

$$\rho_2 = \rho_1 e^{(P_2 - P_1)/K} \quad (1.9)$$

**Exemple 1.3** Quelles sont les masses volumiques de l'air et de l'eau à 200 kPa si, à 100 kPa, elles sont respectivement de  $1,2 \text{ kg/m}^3$  et  $1000 \text{ kg/m}^3$  ?  $K_{\text{air}} = 100 \text{ kPa}$   
 $K_{\text{H}_2\text{O}} = 2,2 \text{ GPa}$

Puisque

$$\rho = \rho_1 e^{K(P - P_1)}$$

Alors, pour l'air

$$\rho_2 = 1,2 e^{100/100} = 1,26 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \% = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} * 100 \% = 1,72 \%$$

et pour l'eau

$$\rho_2 = 1000 e^{100/(2,2 \times 10^3)} = 1000,045 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \% = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} * 100 \% = 4,5 \times 10^{-3} \%$$

On comprends ainsi pourquoi un liquide tel que l'eau est normalement considéré comme incompressible, contrairement aux gaz.

## 1.2.5 Loi des gaz parfaits

Le comportement des gaz est dit parfait ou idéal lorsque les interactions entre les particules peuvent être négligées (par exemple en situation de faible densité ou de température élevée). Sous cette hypothèse la relation entre les paramètres fondamentaux est traduite par la loi des gaz parfaits dont l'expression est souvent

$$PV = n\bar{R}T \quad (1.10)$$

où  $P$  est la pression absolue du gaz en Pa,  $V$ , le volume occupé par le gaz en  $\text{m}^3$ ,  $n$ , le nombre de moles du gaz dans le volume  $V$ ,  $T$ , la température absolue en Kelvin et  $\bar{R}$  la constante universelle des gaz parfaits dont la valeur numérique est  $8,314 \text{ J/mole} \cdot \text{K}$ . En ingénierie, on préfère que la quantité de matière soit spécifiée par la masse plutôt que le nombre de moles. Se rappelant que

$$n = \frac{m}{M} \quad M: \text{masse molaire du gaz}$$

On définit

$$R = \frac{m}{M} \bar{R} \quad R: \text{constante du gaz}$$

L'équation (1.10) devient alors

$$PV = mRT \quad (1.11)$$

Ou

$$P = \rho RT \quad (1.12)$$

Notons que la valeur de  $R$  est désormais particulière à chaque gaz, ses valeurs sont résumées au tableau 1.3 pour quelques gaz usuels.

Gaz	Formule chimique	$M$ (g/mol)	$R$ (J/kg·K)
Air		28,97	287,00
Argon	Ar	39,948	208,13
Azote	N <sub>2</sub>	28,013	296,80
Butane	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	58,123	143,04
Dioxyde de carbone	CO <sub>2</sub>	44,01	188,92
Ethane	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	30,07	276,50
Éthylène	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	28,054	296,57
Hélium	He	4,003	2077,03
Hydrogène	H <sub>2</sub>	2,016	4124,18
Méthane	CH <sub>4</sub>	16,04	518,35
Monoxyde de carbone	CO	28,01	296,63
Néon	Ne	20,183	411,95
Octane	C <sub>8</sub> H <sub>18</sub>	114,23	77,79
Oxygène	O <sub>2</sub>	31,999	259,63
Propane	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	44,097	166,55
Vapeur d'eau	H <sub>2</sub> O	18,015	461,50

**Tableau 1.3** Propriétés de différents gaz parfaits

**Exemple 1.4** Calculez la masse volumique de l'air dans un pneu où la température est de 21°C et la pression est de 250 kPa et celle dans le milieu ambiant si la pression à l'extérieur est de 101,3 kPa. D'après le tableau 1.3,  $R = 287$  J/kg·K.

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

$$\rho_{\text{pneu}} = \frac{250 \times 10^3}{287 \times (21 + 273,15)} = 2,96 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{atm}} = \frac{101,3 \times 10^3}{287 \times 294,15} = 1,20 \text{ kg/m}^3$$

### 1.3 Pressions absolue et relative

La pression est le rapport entre la composante normale de la force appliquée sur une surface donnée et l'aire de cette surface

Ainsi 
$$P = \frac{dF_{\perp}}{dA}$$



Figure 1.10 Définition de la pression

Dans le S.I., la pression s'exprime en Pa (1 Pa = 1 N/m<sup>2</sup>). La pression absolue est la pression mesurée par rapport au vide absolu. La pression atmosphérique en constitue un exemple. La pression relative (ou « gauge pressure », mesure l'écart de la pression absolue) avec une valeur de référence. Typiquement on prend la pression atmosphérique dans le voisinage immédiat comme pression de référence.

$$P_{\text{rel}} = P_{\text{abs}} - P_{\text{atm}} \quad (1-13)$$

À moins que le contexte ne l'exige, nous n'utiliserons pas de symbole particulier pour désigner la pression relative.

### 1.4 Loi de Pascal

Considérons un prisme de dimensions infinitésimales extrait d'une région de fluide au repos (pas d'écoulement). Comme le fluide est au repos, il n'y a pas de forces de cisaillement, seules les forces dues à la pression et le poids agissent.

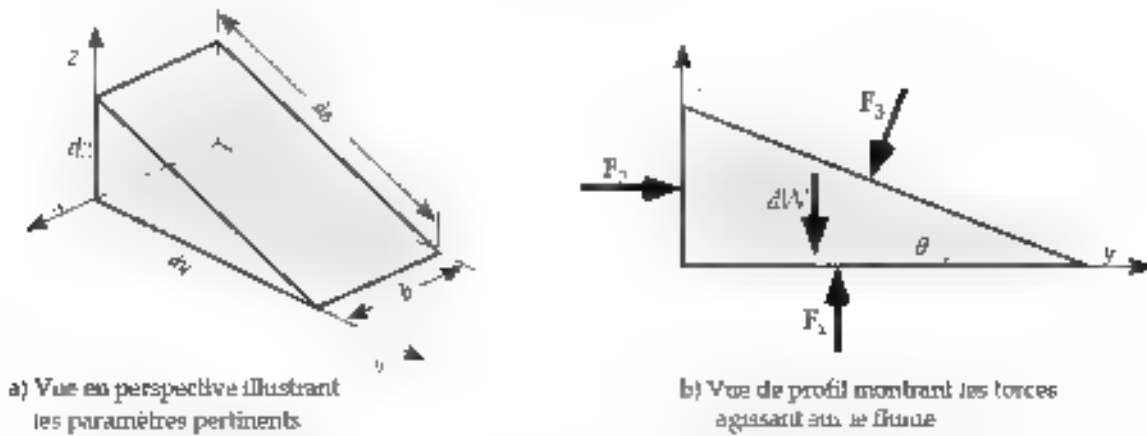


Figure 1.11 Diagramme des forces agissant sur un prisme de fluide au repos

Le fluide est en équilibre, alors

$$\sum F = 0$$

$$\sum F_y = F_2 - F_3 \sin \theta = P_1 b dz - P_3 b ds \sin \theta = 0$$

Or

$$ds \sin \theta = dz$$

$$\sum F_y = P_1 - P_3 \sin \theta = 0$$

Alors

$$P = P_3$$

Par ailleurs,

$$\sum F_x = F_1 - F_3 \cos \theta - dW = 0$$

$$dW = g dm = \rho g dV = \rho g b \frac{dy dz}{2}$$

$$\sum F_x = P_1 b dy - P_3 b \cos \theta ds - \rho g b \frac{y dy dz}{2} = 0$$

Or

$$ds \cos \theta = dy$$

$$\sum F_x = (P_1 - P_3 - \frac{\rho g dz}{2}) b dy = 0$$

En faisant tendre les dimensions vers 0 on a, en particulier

$$\frac{\rho g dz}{2} = 0$$

donc

$$P_1 = P_3$$

De sorte que

$$P_1 - P_3 = P_3$$

Ce résultat indique que quelque soit l'orientation de la surface utilisée pour mesurer la pression en un point, on trouvera toujours le même nombre. La pression n'a donc pas à être considérée comme une grandeur vectorielle.

### 1.5 Variation de pression dans un fluide au repos

Il est notoire que la pression varie selon l'altitude dans un fluide au repos du fait des effets gravitationnels. Tentons de quantifier cela. Considérons un élément cylindrique infinitésimal à l'intérieur d'un fluide au repos, tel qu'illustré ci-dessous (nous choisissons de ne représenter que les forces agissant selon la verticale)

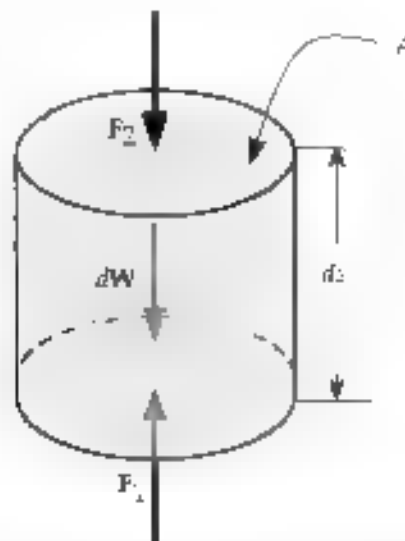


Figure 1.12 Diagramme des forces selon la verticale pour un élément de fluide cylindrique

L'équilibre des forces selon  $z$  s'écrit

$$\sum F_z = F_1 - F_2 - dW = 0$$

Or  $F = PA$ ,  $F_2 = (P + dP)A$ ,  $dW = \rho g A dz$

$$\sum F = PA - (P + dP)A - \rho g A dz = 0$$

Donc :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (1.14)$$

Le signe négatif implique que la pression diminue avec l'élévation (ou altitude) et vice-versa. L'équation (1.14) s'écrit aussi

$$dP = -\rho g dz \quad (1.15)$$



De sorte qu'en intégrant de part et d'autre on trouve

$$P_2 - P_1 = \int_1^2 \rho g dz \quad (1-16)$$

En fait il est rare que l'on doive tenir compte la variation de  $g$  étant donné la différence d'élévation considérée. En ce cas, l'équation (1-16) prend plutôt la forme

$$P_2 - P_1 = g \int_1^2 \rho dz \quad (1-17)$$

### 1.5.1 Le cas de masse volumique uniforme

Si la masse volumique peut être considérée uniforme (donc constante en fonction de  $z$ ), l'équation (1-17) donne le résultat bien connu

$$P_2 - P_1 = \rho g(z_2 - z_1) \quad (1-18)$$

Pour les gaz le résultat (1-18) peut souvent s'appliquer dans la mesure où la différence d'élévation  $z_2 - z_1$  n'est pas trop grande et que la température ne varie pas trop dans cette région. Pour les liquides, puisqu'ils sont souvent considérés incompressibles, le résultat s'applique presque toujours. Ce sera le cas dans le cadre de ce texte.

**Exemple 1.4** Un plongeur descend à la profondeur de 30 m dans de l'eau de mer. Calculez la pression ressentie par le plongeur si la pression atmosphérique est de 100 kPa si  $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$

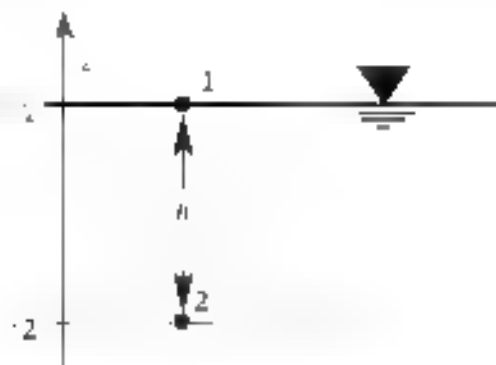


Figure 1.13 Plongeur à une profondeur  $h$

L'eau de mer est incompressible donc

$$P = P_1 + \rho g(z_1 - z_2)$$

$$P_1 = P_{atm} \text{ et } z_1 - z_2 = -h$$

$$P_2 = P_{atm} + \rho g h$$

$$P = 100 \times 10^3 + 1025 \times 9,81 \times 30 \text{ Pa} = 401,7 \text{ kPa}$$

### 1.5.2 Le cas de masse volumique variable dans les gaz

Utilisons la loi des gaz parfaits (1.12) pour décrire la relation entre la pression, la température et la masse volumique

$$P = \rho RT$$

Par ailleurs la variation de la pression en fonction de l'altitude est donnée par l'équation (1.14). En combinant les équations (1.12) et (1.15), il vient

$$\begin{aligned} dP &= -\frac{\rho}{RT} g dz \\ \frac{dP}{P} &= -\frac{g}{RT} dz \end{aligned} \quad (1.19)$$

La solution pour  $P$  de l'équation (1.19) dépend de la dépendance de la température en fonction de l'altitude,  $z$ . Nous considérerons deux cas

- la température ne varie pas en fonction de l'altitude;
- la température varie de façon linéaire en fonction de  $z$ .

- Si la température est constante dans la région considérée (c'est-à-dire sur la différence d'élévation  $z_2 - z_1$ ), on peut intégrer chaque membre de l'équation (1.19) pour trouver

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} &= \int_{z_1}^{z_2} -\frac{g}{RT} dz = -\frac{g}{RT} \int_{z_1}^{z_2} dz \\ \ln \frac{P_2}{P_1} &= -\frac{g}{RT} (z_2 - z_1) \\ \frac{P_2}{P_1} &= e^{-\frac{g}{RT} (z_2 - z_1)} \end{aligned} \quad (1.20)$$

4. Il arrive que la température croisse (ou décroisse) de façon linéaire en fonction de l'élévation

$$T = T_0 + bz \quad (1-21)$$

Ce comportement s'observe à diverses altitudes. C'est en particulier le cas dans la troposphère (faible altitude) dans le cas duquel

$$T_0 = 288,15 \text{ K et } b = -6,5 \times 10^{-3} \text{ K/m}$$

Insérant (1-21) dans (1-19) et intégrant de part et d'autre il vient

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho}{R(T_0 + bz)} dz = \frac{\rho}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T_0 + bz}$$

Et en conséquence

$$\left( \frac{P_2}{P_1} \right) = \left( \frac{T_0 + bz_2}{T_0 + bz_1} \right)^{\frac{\rho}{Rb}} \quad (1-22)$$

La figure 1-14 illustre comment varie la température dans une portion de l'atmosphère

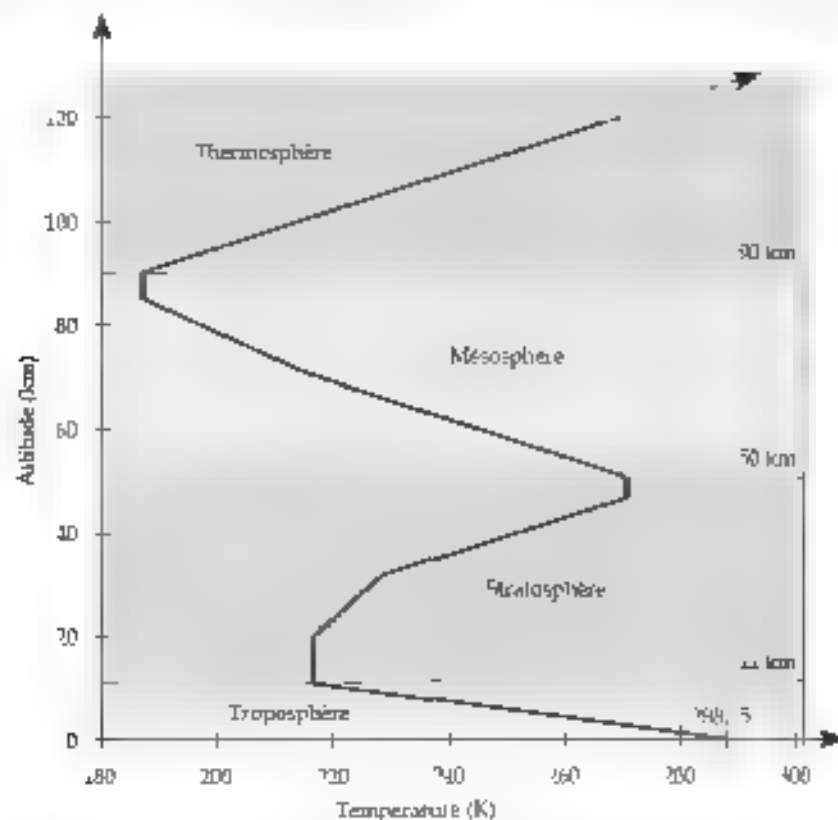


Figure 1-14 Variation de la température en fonction de l'altitude en atmosphère standard

**Exemple 1.5** Comme le montre la figure qui précède, la température varie de façon linéaire jusqu'à l'altitude de 11 km et se maintient constante au delà, jusqu'à 20 km. Établissez la pression à l'altitude de 20 km sachant que la pression au niveau du sol est de 101,3 kPa et que

$$T(z) = T_0 + bz$$

avec :  $T_0 = 288,15 \text{ K}$  et  $b = -0,0065 \text{ K/m}$  pour  $0 \leq z \leq 11 \text{ km}$

*Solution*

Puisque la température a une dépendance différente de 0 à 11 km d'altitude et de 11 à 20 km, on devra procéder en deux temps.

*i.*  $0 < z < 11 \text{ km}$  : L'équation (1.22) permet de connaître la pression à l'altitude de 11 km.

$$\frac{P_z}{P_1} = \left( \frac{T_0 + bz_z}{T_0 + bz_1} \right)^{\frac{g}{Rb}} = \left( \frac{T_z}{T_1} \right)^{\frac{g}{Rb}}$$

ici,  $T_1 = T_0 = 288,15 \text{ K}$  et  $T_z = 288,15 - 0,0065 * 11000 = 216,65 \text{ K}$

alors que  $\frac{g}{Rb} = \frac{9,81}{287 * -0,0065} = -5,259$

$$\text{Donc } P_z = P_1 \left( \frac{T_z}{T_1} \right)^{\frac{g}{Rb}} = 101,3 * \left( \frac{216,65}{288,15} \right)^{-5,259} = 22,606 \text{ kPa} = P(z = 11 \text{ km})$$

*ii.*  $11 < z < 20 \text{ km}$  : La pression à l'altitude de 20 km s'obtient à l'aide de l'équation (1.20)

$$\frac{P_z}{P_1} = e^{\frac{g}{R} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_z} \right)}$$

où  $P_1 = P(z = 11 \text{ km}) = 22,606 \text{ kPa}$  et  $T_1 = T(z = 11 \text{ km}) = 216,65 \text{ K}$

$$\frac{g}{RT_1 T_z} \approx \frac{9,81}{287 * 216,65} * (20000 - 11000) = 1,4199$$

$$\text{ainsi } P_z = P_1 e^{\frac{g}{R} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_z} \right)} = 22,606 * e^{-1,4199} = 5,465 \text{ kPa}$$

Donc  $P(z = 20 \text{ km}) = 5,465 \text{ kPa}$

Altitude (m)	Pression absolue (Pa)	Température (K)	Masse volumique (kg, m <sup>3</sup> )
0	1,01325	288,15	1,2250
1000	0,89883	281,7	1,117
2000	0,79500	275,2	1,0066
4000	0,65656	260,7	0,8194
6000	0,47222	249,2	0,6602
8000	0,35635	236,2	0,5256
10000	0,26500	223,3	0,4136
11500	0,2098	216,7	0,3375
13000	0,1640	216,7	0,3119
14000	0,1417	216,7	0,2779
16000	0,1033	216,7	0,2065
18000	0,07565	216,7	0,1516
20000	0,05529	216,7	0,1089
23000	0,04047	213,6	0,0845
24000	0,02972	210,6	0,0694
26000	0,02188	212,5	0,05426
28000	0,01616	214,5	0,04508
30000	0,01197	226,5	0,03184
33000	0,00889	228,5	0,02356

Tableau 1.4 Paramètres de l'atmosphère standard



## 1.6 EXERCICES

**Problème 1** Quelle est la densité de l'hydrogène à 20 °C et 101,3 kPa si l'air est pris comme référence à 4 °C et 101,3 kPa. Quelles sont les masses volumiques des deux gaz à ces conditions.

$$\text{Rép. } \sigma_{H_2} = 0,066; \rho_{\text{air}} = 1,27 \text{ kg/m}^3, \rho_{H_2} = 0,0838 \text{ kg/m}^3$$

**Problème 2** Un chimiste veut préparer du vin à une densité de 1,05 en utilisant du vin ayant une densité de 1,12. Quelle est la proportion  $\alpha$  du volume d'eau ajouté par rapport au volume final.

$$\text{Rép. } \alpha = 0,58$$

**Problème 3** Un bloc est tiré à la vitesse constante de 0,5 m/s à la surface d'un film d'huile ( $\mu = 0,38 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ) de 3 mm d'épaisseur (figure P 1.3). La surface de contact entre le bloc et l'huile est 0,3 m<sup>2</sup>. Le profil de vitesse de l'huile est donné par la fonction  $v(y) = 0,5 \left( e^{\frac{y}{a}} - 1 \right) \text{ m/s}$

- Calculez le paramètre  $a$ .
- Calculez la force  $F$  nécessaire au maintien du mouvement du bloc.

$$\text{Rép. a) } a = 0,693, \quad \text{b) } F = 26,33 \text{ N}$$

**Problème 4** De l'eau à 25 °C est en écoulement à travers une conduite circulaire (figure P 1.4).

Si l'écoulement présente un profil de vitesse donné par  $v(r) = 10 \left( 1 - 100r^2 \right) \text{ m/s}$

- dites ce que vaut le rayon de la conduite;
- calculez la contrainte de cisaillement à la paroi;
- calculez la contrainte de cisaillement à mi-chemin entre le centre de la conduite et la paroi;
- établissez la force exercée par l'écoulement sur 30 cm de conduite

$$\text{Rép. a) } R = 1 \text{ cm}, \quad \text{b) } \tau = 1,798 \text{ Pa}, \quad \text{c) } \tau = 0,899 \text{ Pa}, \quad \text{d, } F = 0,03389 \text{ N}$$

**Problème 5** Un viscosimètre est constitué de deux tubes concentriques entre lesquels est disposé le fluide à étudier (figure P 1.5). Un couple de 0,174 Nm est nécessaire pour faire tourner le cylindre interne à la vitesse de 400 rpm (tour par minute). On suppose que le profil de vitesse dans le fluide est linéaire. Calculez la viscosité dynamique du fluide.

$$\text{Rép. } \mu = 1,65 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

**Problème 6** Un bloc de 10 kg glisse à vitesse constante le long d'une surface inclinée tel qu'il est illustré à la figure P 1.6. Déterminez la vitesse du bloc si le film est constitué d'une huile lubrifiante à 20 °C (tableau 1.1). Supposez que le profil de vitesse dans le fluide est linéaire et que la surface de contact entre le bloc et l'huile est de 0,2 m<sup>2</sup>.

$$\text{Rép. } v = 1,28 \text{ m/s}$$

**Problème 7** Une huile de viscosité  $\mu = 0,35 \text{ Pa.s}$  est contenue entre 2 plaques parallèles de 0,13 m<sup>2</sup> de surface. En supposant un profil de vitesse linéaire et un espacement de 2,5 mm entre les plaques, quelle force faut-il appliquer sur la plaque du haut pour la déplacer à la vitesse constante de 0,6 m/s alors que la plaque du bas reste immobile ?

$$\text{Rép. } F = 11,9 \text{ N}$$

**Problème 8** Un mince film ( $h = 4 \text{ mm}$ ) d'éthylène glycol à 20 °C s'écoule le long d'un plan incliné (figure P 1.8) sous l'effet de la gravité. Puisque la vitesse d'écoulement est constante dans le temps, le poids est compensé par le frottement visqueux. On sait que le profil de vitesse s'écrit

$$u(y) = U \left[ \frac{2y}{h} - \frac{y^2}{h^2} \right] \text{ m/s.}$$

- Dites ce que représente le paramètre  $U$ .
- Calculez  $U$  en prenant  $\alpha = 20^\circ$ .

$$\text{Rép. } U = 1,3 \text{ m/s}$$



**Problème 9** Un ballon sphérique a un rayon de 5 m. La pression atmosphérique est de 100 kPa et la température est de 20° C. Calculez la masse et le nombre de moles d'air que déplace le ballon. Si le ballon est rempli d'hélium à 100 kPa et à 20° C, quels sont la masse et le nombre de moles d'hélium.

Rép. air  $n = 21,5 \text{ kmol}$ ,  $m = 623 \text{ kg}$

hélium  $n = 21,5 \text{ kmol}$ ;  $m = 86 \text{ kg}$

**Problème 10** Calculez la pression relative et la pression absolue d'un liquide de densité  $\sigma = 1,3$  à la profondeur de 10 m si la pression à la surface libre du fluide est de 120 kPa.

Rép.  $P_{\text{abs}} = 247,5 \text{ kPa}$

$P_{\text{rel}} = 127,5 \text{ kPa}$

**Problème 11** La pression relative dans un gazoduc à une altitude de 100 m, par rapport à la surface de la mer, est de 15 mmHg (figure P 1.11). Calculez la pression relative dans le même gazoduc au niveau de la mer. Les masses volumiques du gaz et de l'air environnant sont respectivement de 0,6 kg/m<sup>3</sup> et 1,2 kg/m<sup>3</sup>. Considérez que les masses volumiques sont constantes.

Rép.  $P = 10,6 \text{ mm Hg}$

**Problème 12** On désire calculer l'intensité de la pression relative dans l'océan en admettant d'abord que l'eau salée est incompressible puis compressible

1. Calculez cette pression pour le cas incompressible à une profondeur de 1500 m sachant qu'à la surface la masse volumique est  $\rho_0 = 1025 \text{ kg/m}^3$
2. En admettant un coefficient  $K$  de compressibilité constant exprimez la pression  $P$  à une profondeur  $h$  en fonction de la masse volumique  $\rho$  à cette profondeur et de  $\rho_0$ .
3. Exprimez la masse volumique  $\rho$  en fonction de  $h$ ,  $\rho_0$  et  $K$ .
4. Calculez la masse volumique et la pression à la profondeur 1500 m sachant que  $K = 2,06 \text{ GPa}$ .

$$\begin{array}{ll} \text{1. } P = 15,08 \text{ MPa} & \text{3. } \rho = \frac{k \rho_0}{\rho_0 g h} \\ \text{Rép.} & \\ \text{2. } P = K \ln \frac{\rho}{\rho_0} & \text{4. } P = 15,14 \text{ MPa} \end{array}$$

**Problème 13** La planète Vénus a une température moyenne de  $427^\circ \text{C}$  et la pression à la surface est de 2,0 MPa. Pour les besoins du calcul, on consid rera que son atmosphère est constituée de  $\text{CO}_2$  uniquement (gaz parfait) que l'accélération gravitationnelle est de  $8,73 \text{ m/s}^2$  et que la température est constante en fonction de l'altitude. Trouvez l'altitude à laquelle la pression atmosphérique est de 0,1 MPa. ( $R = 188,92 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ )

$$\text{Rép. : } h = 45390 \text{ m}$$

**Problème 14** On a enregistré une température de  $35^\circ \text{C}$  et une pression de 45,5 kPa à une certaine altitude alors que ces coordonnées sont respectivement  $15^\circ \text{C}$  et 101,5 kPa au niveau de la mer. On peut supposer que la température chute uniformément à mesure que l'altitude croît. Calculez le taux de chute de température de même que la pression à une altitude de 3000 m.

$$\text{Rép. : } b = 6,37 \times 10^{-3} \text{ K/m; } P = 70,2 \text{ Pa}$$

**Problème 15** La pression et la température dans l'air au niveau de la mer sont respectivement 100 kPa et 288 K. La température chute au taux de  $0,0065 \text{ K/m}$  jusqu'à la stratosphère (11000 m) où elle demeure constante à 216,5 K. Calculez la pression et la masse volumique à une altitude de 18000 m. ( $R = 287 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ )

$$\text{Rép. : } P = 73,8 \text{ kPa, } \rho = 0,119 \text{ kg/m}^3$$

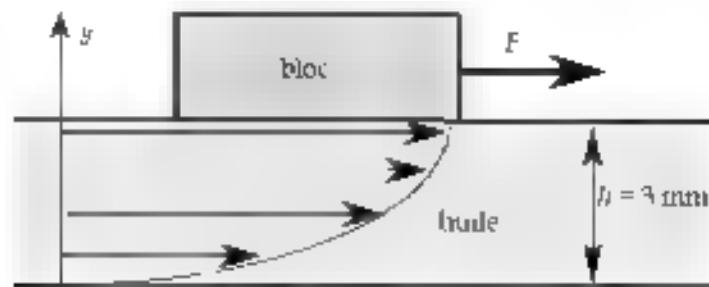


Figure P 1.3

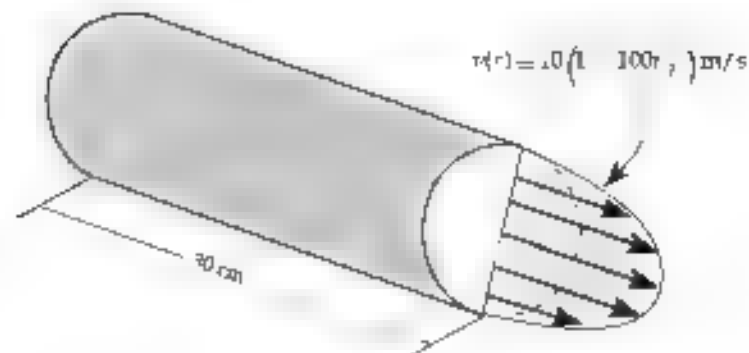


Figure P 1.4

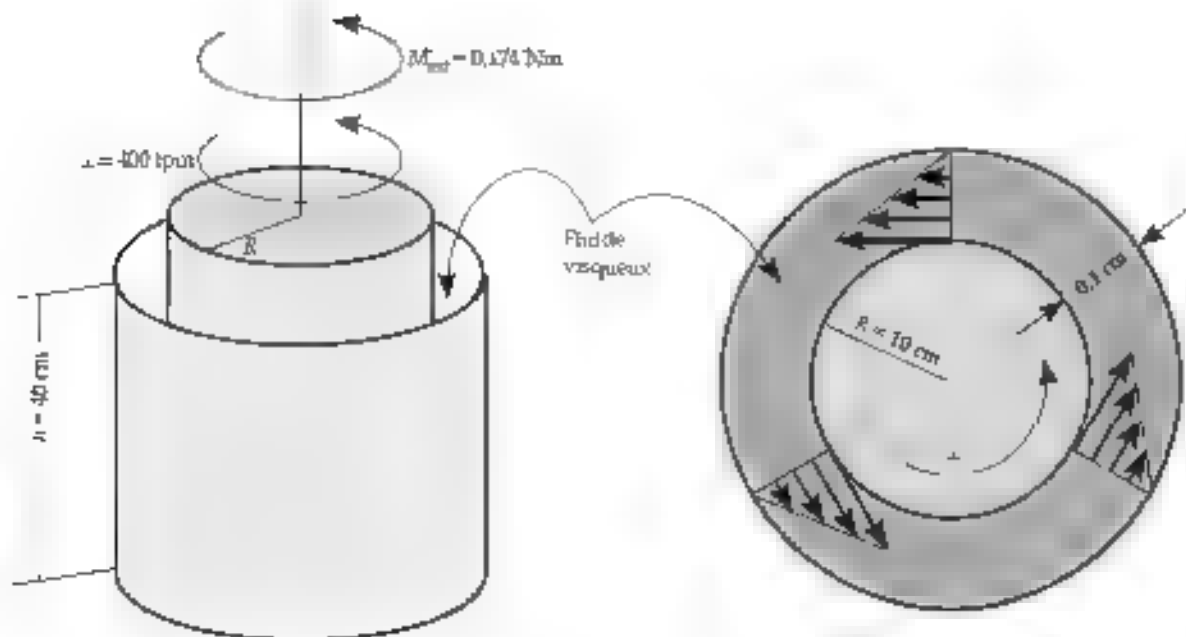


Figure P 1.5

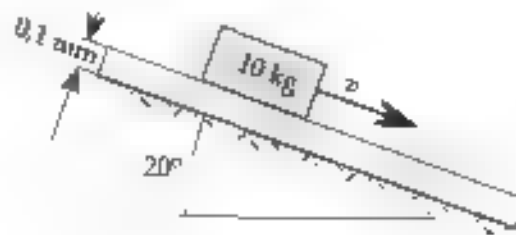


Figure P 1.6

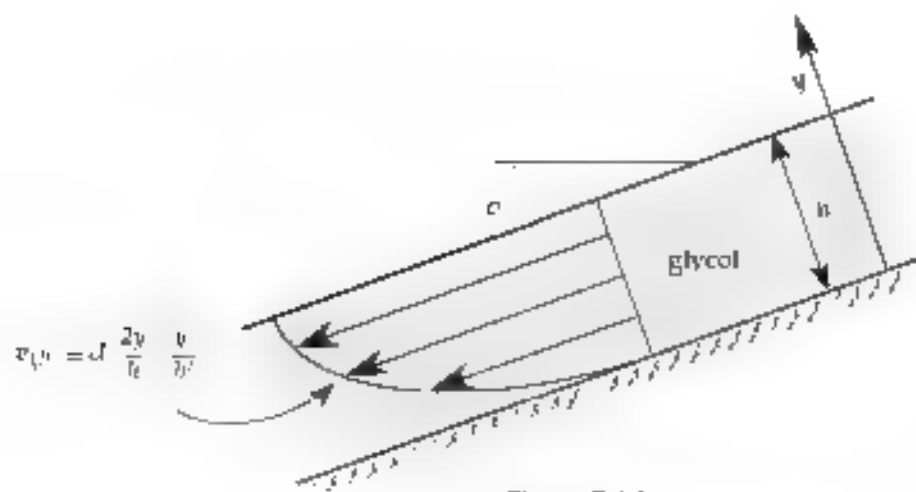


Figure P 1.8

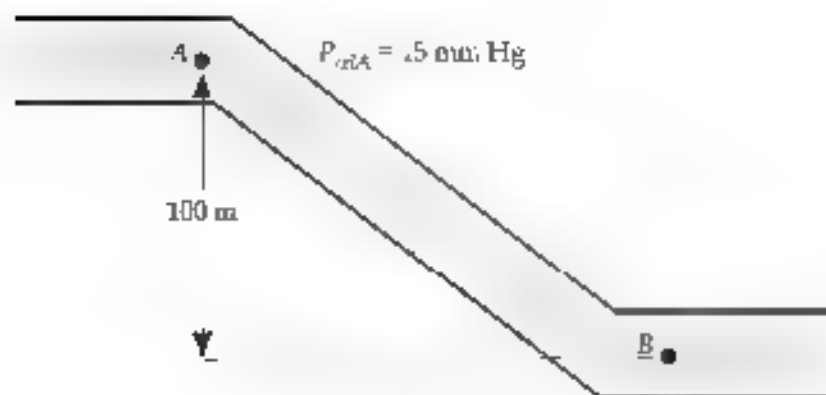


Figure P 1.11

## CHAPITRE 2

### LA STATIQUE DES FLUIDES

#### Table des matières

<b>2.1</b>	<b>Mesures manométriques</b>	<b>3</b>
2.1.1	Manomètre simple (tube piézométrique)	3
2.1.2	Manomètre en U	5
2.1.3	Manomètre incliné	7
<b>2.2</b>	<b>Forces hydrostatiques</b>	<b>8</b>
<b>2.3</b>	<b>Forces hydrostatiques sur une surface plane</b>	<b>8</b>
<b>2.4</b>	<b>Forces hydrostatiques sur une surface courbe</b>	<b>16</b>
2.4.1	Composante horizontale $R_h$	16
2.4.2	Composante verticale $R_v$	18
<b>2.5</b>	<b>Poussée d'Archimède</b>	<b>21</b>
<b>2.6</b>	<b>EXERCICES</b>	<b>25</b>



À la fin du chapitre précédent nous avons établi que la pression varie de façon linéaire dans un fluide au repos quand les variations de masse volumique peuvent être négligées (dans un fluide incompressible, par exemple). En effet, on se souvient que l'équation (1-18)

$$P_2 - P_1 = \rho g(z_2 - z_1)$$

Nous ferons usage de ce résultat dans deux contextes : l'emploi de manomètres et la détermination des forces agissant sur un corps submergé.

## 2.1 Mesures manométriques

Les manomètres sont des dispositifs conçus pour la mesure de différences de pression entre deux points. Une technique standard pour mesurer la pression utilise des colonnes de liquide dans des tubes incurvés ou verticaux.

À cet effet, remarquons que pour un fluide incompressible, l'équation (1-18) peut s'écrire

$$P_2 - P_1 = \pm \rho g h \quad (2-1)$$

selon que le point 1 est situé en dessous (+) ou au-dessus (-) du point 2. Le paramètre  $h$  désigne la différence de hauteur (ou d'altitude) entre les deux points.

### 2.1.1 Manomètre simple (tube piézométrique)

Le type de manomètre le plus simple consiste en un tube vertical, ouvert à une extrémité et relié au point de mesure à l'autre extrémité, tel qu'il est illustré à la figure 2.1

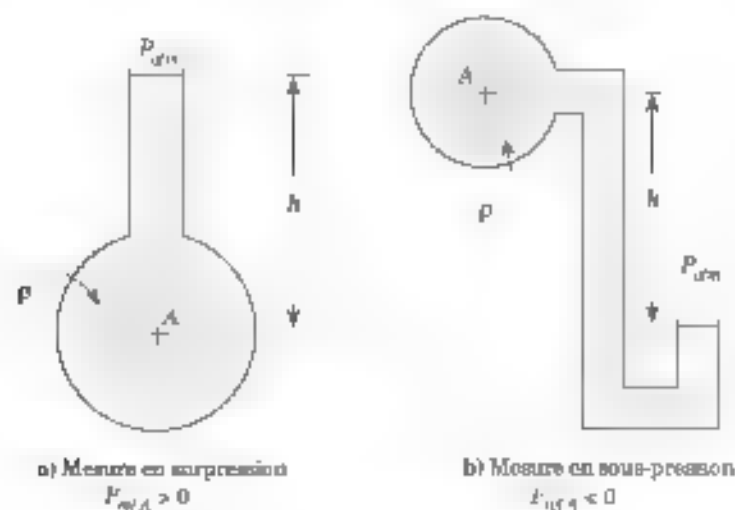


Figure 2.1 Exemples de tubes piézométriques

La mesure de la pression atmosphérique se fait souvent en utilisant un baromètre à mercure, comme il est illustré à la figure 2.2

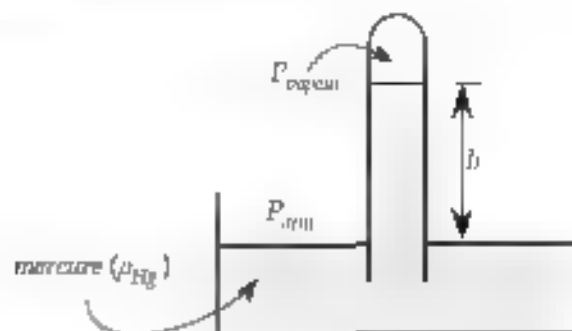


Figure 2.2 Baromètre à mercure

Une éprouvette sous vide est plongée dans un bain de mercure. Sous l'effet de la pression dans le mercure, celui-ci s'élève dans l'éprouvette. À l'équilibre on a

$$P_{\text{atm}} - P_{\text{vapeur}} = \rho_{\text{Hg}} g h$$

Puisque la pression de vapeur du mercure à la température ambiante est très faible (de l'ordre 10 Pa, relativement à la pression atmosphérique  $\sim 10^5$  Pa), cette dernière s'obtient à un degré de précision élevé, par

$$P_{\text{atm}} = \rho_{\text{Hg}} g h \quad (2-2)$$

### Les systèmes mixtes gaz-liquide

Considérez l'ensemble de la figure 2.3 qui comporte une colonne de gaz supportée par une colonne de liquide.

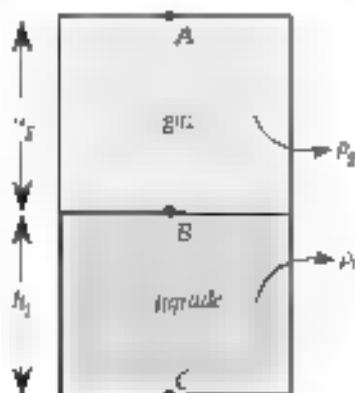


Figure 2.3 Système mixte gaz-liquide

Dans la mesure que la pression dans le gaz varie linéairement avec la profondeur, l'écart de pression entre le sommet et la base du réservoir est donné par



$$P_c - P_A = P_c - P_b + P_b - P_A$$

$$P_c - P_A = \rho_l g h_l + \rho_g g h_g$$

La masse volumique d'un liquide vaut typiquement 1000 fois celle d'un gaz. Si les hauteurs  $h_l$  et  $h_g$  sont comparables, la variation de pression dans le gaz sera tout à fait négligeable par rapport à celle qu'on observe dans le liquide. Ainsi, à moins d'avis contraire (ou lorsque la situation l'exige), nous conviendrons que la variation de pression dans le gaz ne sera pas considérée dans le cas de systèmes mixtes. En l'occurrence, pour ce cas, on écrira

$$P_c - P_A = \rho_l g h_l$$

## 2.1.2 Manomètre en U

Les manomètres illustrés à la figure 2.1 sont limités par la longueur du tube. Pour contourner cette difficulté, un autre type de manomètre est largement utilisé. Il est formé d'un tube en U et contient un fluide appelé « fluide manométrique ».

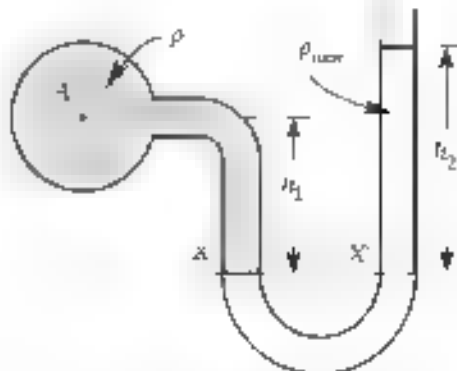


Figure 2.4 Manomètre en U

Les pressions aux points X et X' de la figure précédente sont respectivement données par

$$P_X = P_A + \rho g h_1 \quad \text{et} \quad P_{X'} = P_{\text{atm}} + \rho_{\text{man}} g h_2$$

Puisque  $P_X = P_{X'}$ , on trouve,

$$P_A + \rho g h_1 = P_{\text{atm}} + \rho_{\text{man}} g h_2$$

$$P_A = P_{\text{atm}} + \rho_{\text{man}} g h_2 - \rho g h_1 \quad (\text{pression absolue en A})$$

$$P_{\text{rel}} = \rho_{\text{man}} g h_2 - \rho g h_1 \quad (\text{pression relative en A})$$

Le manomètre en U est aussi utilisé pour mesurer la différence de pression entre deux points d'une conduite ou entre deux conduites différentes. Considérons le manomètre reliant les points A et B de la figure 2.5.

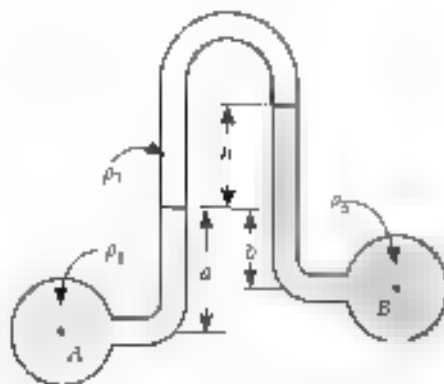


Figure 2.5 Manomètre en U inversé reliant deux conduites

En partant du point A (auquel on attribue la pression  $P_A$ ), on « progresse » à travers le dispositif en apportant les correctifs à la pression associés (lorsque l'on monte dans le dispositif, la pression diminue, lorsque l'on descend, elle augmente) jusqu'à ce qu'on « atteigne » le point B. Ainsi :

$$P_A - \rho_1 g a - \rho_2 g h + \rho_1 g b = P_B$$

Donc

$$P_A - P_B = g(\rho_1 a + \rho_2 h - \rho_1 b)$$

**Exemple 2.1** On utilise un manomètre pour mesurer la différence de pression entre les points A et B d'une conduite d'eau. La densité du fluide manométrique est 13,6 et le point B se situe à 0,3 m au-dessus du point A. Calculez la différence de pression si  $h = 0,7$  m.

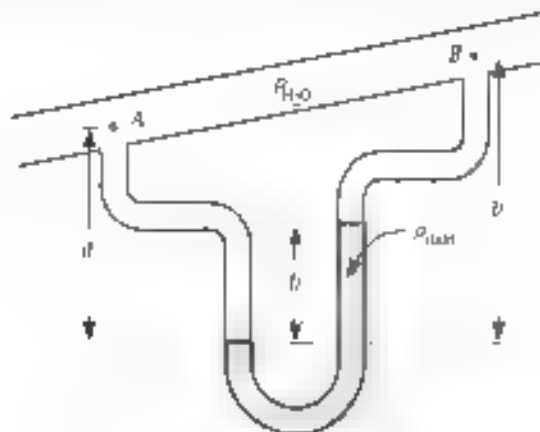


Figure 2.6 Exemple 2.1

$$P_A + \rho_{H_2O} g a - \rho_{man} g h + \rho_{H_2O} g (b - h) = P_B$$

$$P_A - P_B = \rho_{man} g h + \rho_{H_2O} g (b - a - h)$$

$$P_A - P_B = \rho_{H_2O} g ((b - a) + h(\sigma_{man} - 1))$$

$$P_A - P_B = 1000 \cdot 9,81 (0,3 + 0,7(13,6 - 1)) = 89,5 \text{ kPa}$$

### 2.1.3 Manomètre incliné

Un manomètre incliné tel qu'il est illustré à la figure 2.7 peut être utilisé quand on veut mesurer de faibles différences de pression. Il est constitué d'un réservoir de diamètre  $D$  relié à un tube piézométrique de diamètre  $d$  (ouvert à l'atmosphère, par exemple).

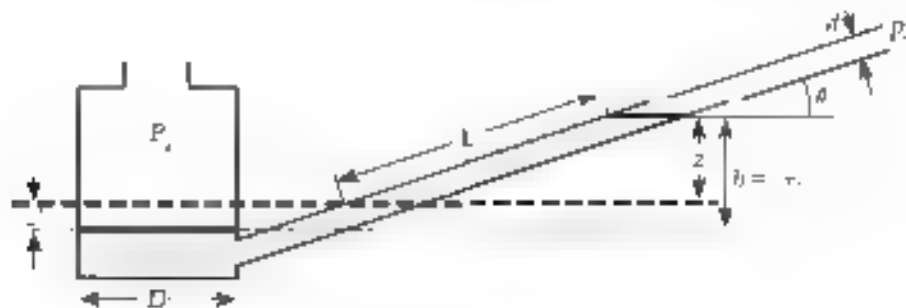


Figure 2.7 Tube piézométrique incliné

Quand les points 1 et 2 sont soumis à la même pression (pression atmosphérique, par exemple), le niveau du liquide se situe au niveau de la ligne pointillée en traits épais. Si le point 1 est assujéti à une pression supérieure que le point 2, le liquide montera dans le tube piézométrique sur la distance  $L$ . La différence de pression s'obtient alors par

$$P_1 - P_2 = \rho g h = \rho g (z + z')$$

Le volume du liquide évacué du réservoir doit correspondre au volume du tube de longueur  $L$ .

En effet on aura

$$\frac{\pi}{4} D^2 z' = \frac{\pi}{4} d^2 L$$

Alors

$$z' = L \left( \frac{d}{D} \right)^2 \quad \text{avec} \quad z = L \sin \theta$$

$$P_1 - P_2 = \rho g L \sin \theta + L \frac{d^2}{D^2}$$

$$P_1 - P_2 = \rho g L \sin \theta \left( 1 + \frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right) = KL$$

Ainsi, le résultat est directement proportionnel à  $L$ . Une fois l'appareil calibré (la constante  $K$  établie), la lecture de  $L$  donne immédiatement la différence de pression recherchée. Manifestement, le dispositif est d'autant plus sensible à de faibles écarts de pression que les diamètres diffèrent et que le tube est fortement incliné.

Par exemple, si  $\theta = 2^\circ$ ,  $d = 2 \text{ cm}$ ,  $D = 20 \text{ cm}$ ,  $L = 50 \text{ cm}$  et  $\rho = 13600 \text{ kg/m}^3$ ,

$$P_1 - P_2 = 3,0 \text{ kPa}$$

## 2.2 Forces hydrostatiques

Un corps submergé dans un fluide au repos (en absence d'écoulement) ne ressent que l'effet de la pression puisqu'il n'y a pas de forces de frottement visqueux. Le propos de ce qui suit est de caractériser ces forces dites « hydrostatiques ».

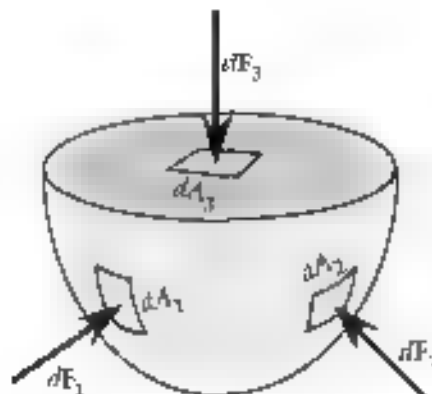


Figure 2.8 Microforces dues à la pression en trois points d'une surface

Pour une surface déterminée, la force hydrostatique résultante est obtenue en sommant les forces infinitésimales

$$\mathbf{R} = \int d\mathbf{F} \quad (2-3)$$

**NB** La quantité  $d\mathbf{F}$  peut, alternativement, désignée comme un « élément de force », une « force infinitésimale » ou une « microforce ». Nous ferons usage de ces différentes appellations par la suite.

## 2.3 Forces hydrostatiques sur une surface plane

*Détermination de  $\mathbf{R}$*

Considérons une surface plane en contact à sa gauche avec un fluide de masse volumique  $\mu$ , comme il est illustré à la figure 2.9. Désignons par  $O$  l'intersection entre le prolongement de la plaque et le niveau libre. On veut établir la résultante  $\mathbf{R}$  de l'ensemble des microforces  $d\mathbf{F}$  qui agissent sur la surface. Soit  $y$ , la profondeur à partir du niveau libre.

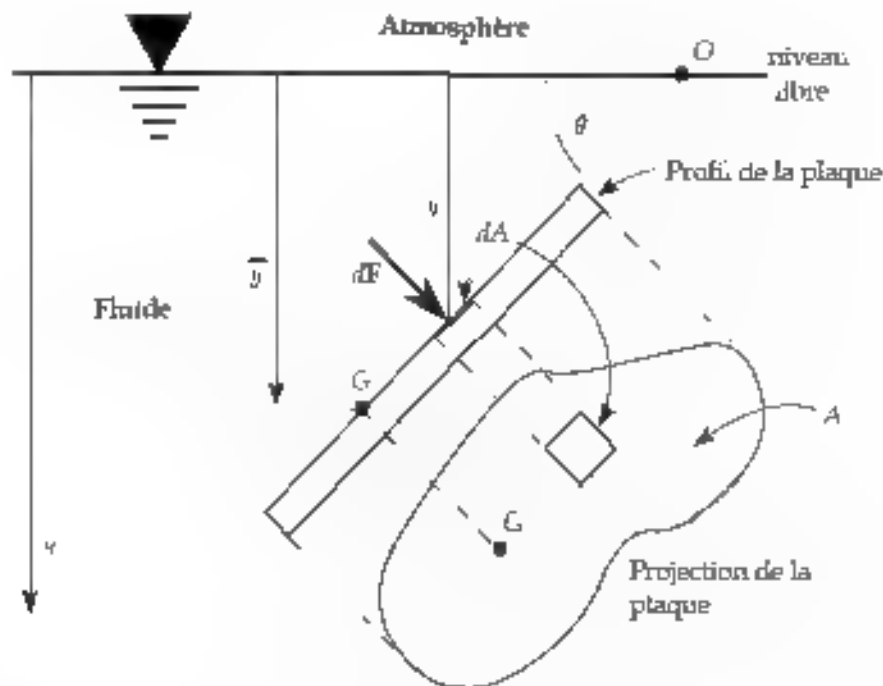


Figure 2.9 Paramètres impliqués dans le calcul de la force hydrostatique résultante

On s'intéresse à la force *supplémentaire* résultant de l'action du fluide c'est-à-dire à la contribution qui s'ajoute aux forces produites par la pression atmosphérique. Exprimé autrement, nous voulons établir la force hydrostatique résultant de l'action de la *pression relative* uniquement. Ainsi,

$$P_{\text{rel}} = P = \rho g y \quad (2-4)$$

Comme l'indique l'expression (2-3), la somme des microforces doit s'effectuer composante à composante (c'est une somme vectorielle). Toutefois ici, puisque la surface mouillée est plane, toutes les microforces (les  $dF$ ) sont parallèles entre elles. On connaît d'emblée la direction de  $R$ , elle sera parallèle aux  $dF$  et il suffit de sommer les grandeurs des microforces pour obtenir la norme de  $R$ . C'est-à-dire

$$\begin{aligned} R &= \int dF \\ R &= \int_A P dA \\ R &= \int_A \rho g y dA = \rho g \int_A y dA \end{aligned} \quad (2-5)$$

La *profondeur* du centre géométrique (« centre de gravité ») de la surface mouillée, mesurée à partir du niveau libre est donnée par la relation suivante :

$$y = \frac{\int y dA}{A}$$

Le tableau 2-1 donne la position du centre géométrique de formes géométriques élémentaires. On trouve alors pour  $R$

$$R = \rho g \bar{y} A \quad (2-6)$$

#### Détermination de $y_C$

De la même façon que l'on considère que le poids d'un corps agit en son centre de gravité, on fait agir  $R$  en un point appelé le *centre de pression*  $C$ . Notons que pour que  $R$  remplace adéquatement l'ensemble des microforces  $dF$  agissant sur toute la surface, il faut que  $R$  produise le même moment de force autour d'un point quelconque ( $O$  par exemple) que l'ensemble des microforces (figure 2-10).

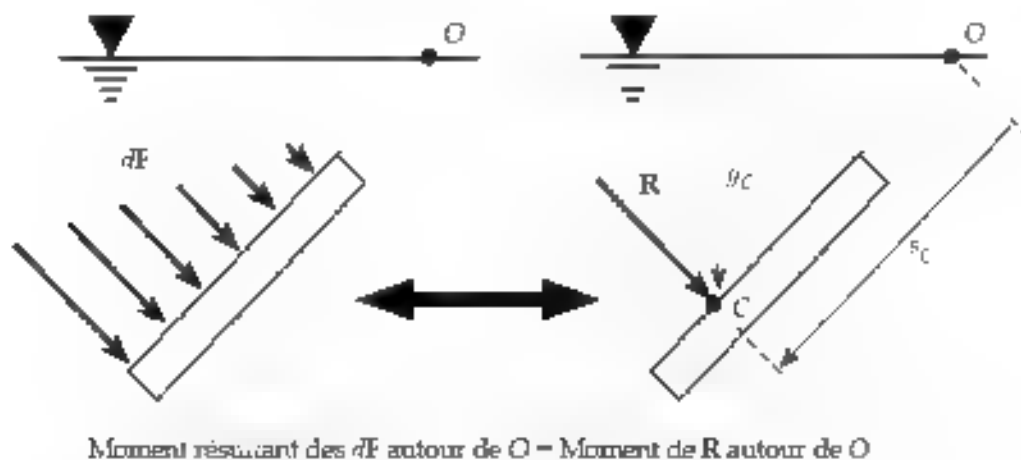


Figure 2-10 Remplacement des microforces par la résultante

Le moment produit par la microforce  $dF$  autour de  $O$  est donné par (figure 2.11)

$$dM_O = s \, dF = sP \, dA = s\rho g y \, dA$$

or

$$y = s \sin \theta,$$

alors

$$dM_O = \rho g s^2 \sin \theta \, dA$$

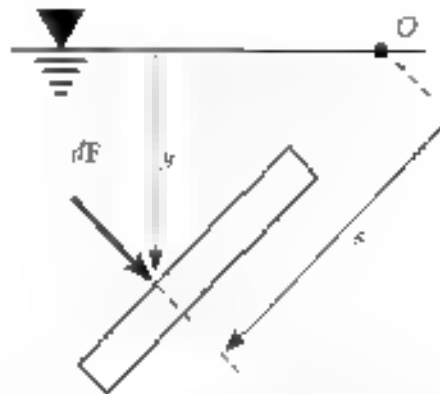


Figure 2.11 Paramètres d'intérêt dans le calcul du moment résultant

Le moment résultant  $M_O$  est donc

$$M_O = \int_A \rho g \sin \theta s^2 dA = \rho g \sin \theta \int_A s^2 dA$$

On reconnaît  $I_y$ , le moment d'inertie de la surface mouillée par rapport à l'axe perpendiculaire à la feuille passant par  $O$

$$I_y = \int_A s^2 dA$$

$$M_O = \rho g I_O \sin \theta \quad (2.7)$$

D'autre part, en référant à la Figure 2.10, on a

$$M_O = R s_c = \frac{\rho g R}{\sin \theta} \quad (2.8)$$

Égalisant (2.7) et (2.8), on trouve

$$s_c = \frac{\rho g I_c \sin \theta}{R}$$

Si on remplace  $R$  par son expression en (2.6), il vient

$$s_c = \frac{I_O \sin \theta}{\bar{y} A}$$

En vertu du théorème des axes parallèles,

$$I_O = I_G + \frac{A \bar{y}^2}{\sin \theta}$$

où  $I_c$  est le moment d'inertie de la surface mouillée par rapport à l'axe normal (perpendiculaire) au plan de la figure qui passe par  $C$ . Les propriétés des surfaces communes apparaissent au tableau 2.2. On obtient alors pour  $y_c$  la profondeur du centre de pression,

$$y_c = \frac{I_c \sin \theta}{yA} + \bar{y} \quad (2.9)$$

La figure 2.12 ainsi que les équations (2.10) et (2.11) résument les conclusions auxquelles nous sommes arrivés.

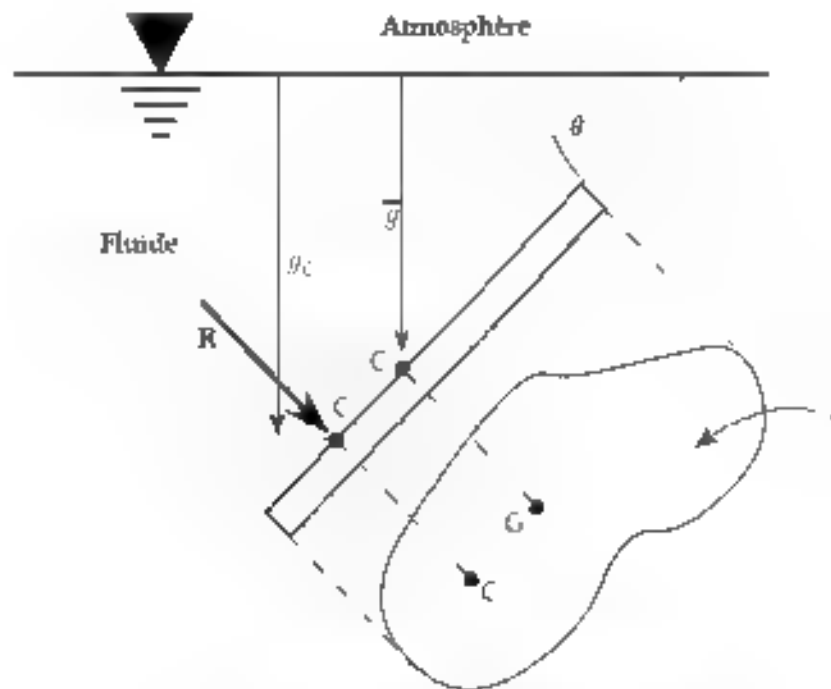


Figure 2.12 Grandeurs pertinentes au calcul de  $R$  et de  $y_c$ .

$$R = \rho g y_f A \quad (2.10)$$

$$y_c = \frac{I_c \sin \theta}{yA} + \bar{y} \quad (2.11)$$



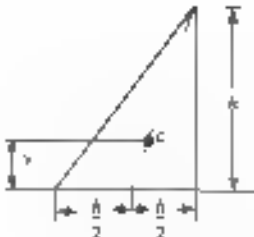


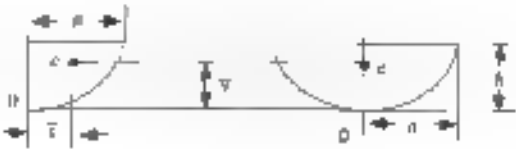
Forme			$\bar{y}$	Surface
Surface de triangle			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Surface de quart de cercle		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Surface demi-circulaire		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Surface de quart d'ellipse		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Surface demi-elliptique		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Surface demi-parabolique		$\frac{3b}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2bh}{3}$
Surface parabolique		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$

Tableau 2.1 Centres géométriques de formes géométriques élémentaires

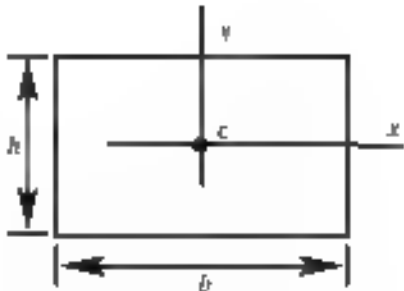
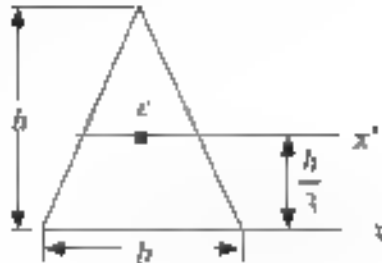
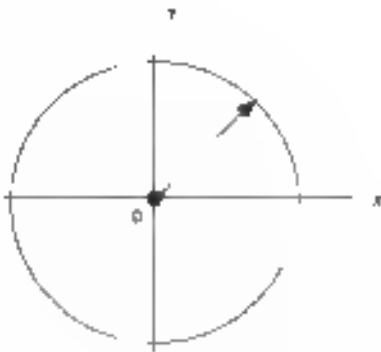
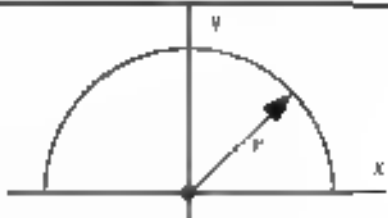
Rectangle		$I = \frac{1}{12}bh^3$ $I_y = \frac{1}{12}b^3h$
Triangle		$I_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I = \frac{1}{12}bh^3$
Cercle		$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $I_o = \frac{1}{2}\pi r^4$
Demi-cercle		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $I_o = \frac{1}{4}\pi r^4$

Tableau 2.2 Moments d'inertie de formes géométriques élémentaires

**Exemple 2.2** Une porte rectangulaire de 4 m de long par 2 m de profondeur est disposée le long d'une paroi inclinée d'un grand réservoir tel qu'illustré à la figure 2.13. La porte est montée sur un pivot coïncidant avec son centre géométrique. Calculez la grandeur de la force appliquée par le cran d'arrêt  $F$  sur la porte pour la maintenir immobile.

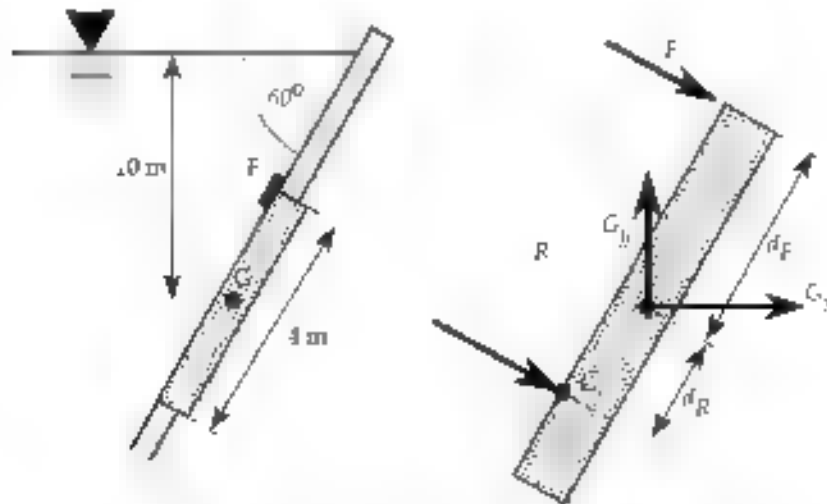


Figure 2.13 Exemple 2.2 et diagramme de forces pour la porte

Calcul de  $R$

$$R = \rho g \bar{y} A$$

où

$$\bar{y} = 10 \text{ m} \quad A = 2 \times 4 = 8 \text{ m}^2$$

$$R = 784,8 \text{ kN}$$

Calcul de  $y_c$

$$y_c = \frac{I_G \sin^3 \theta}{\bar{y} A} + \bar{y}$$

$$I_G = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} 4^3 = 10,67 \text{ m}^4$$

$$y_c = \frac{10,67 \cdot 0,75}{10 \cdot 2 \cdot 4} + 10 = 10,1 \text{ m}$$

Condition d'équilibre

$$\sum M_G = 0$$

Avec

$$d_R = \frac{y_c - 10}{\sin \theta} \quad d_F = 2 \text{ m}$$

$$R \frac{y_c - 10}{\sin \theta} - 2F = 0$$

$$784,8 \text{ kN} \frac{0,1}{\sin 60^\circ} - 2F = 0 \Rightarrow F = 45,3 \text{ kN}$$

## 2.4 Forces hydrostatiques sur une surface courbe

Pour une surface courbe immergée, les éléments de force  $dF$  ne sont pas parallèles entre eux, on doit donc les sommer composante à composante.

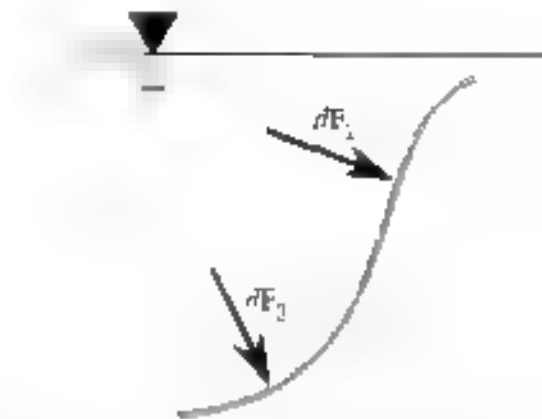


Figure 2.14 Forces hydrostatiques sur une surface courbe

### 2.4.1 Composante horizontale $R_h$

Considérons la force infinitésimale  $dF$  agissant sur un élément de surface  $dA$  situé à la profondeur  $y$  (figure 2.15).

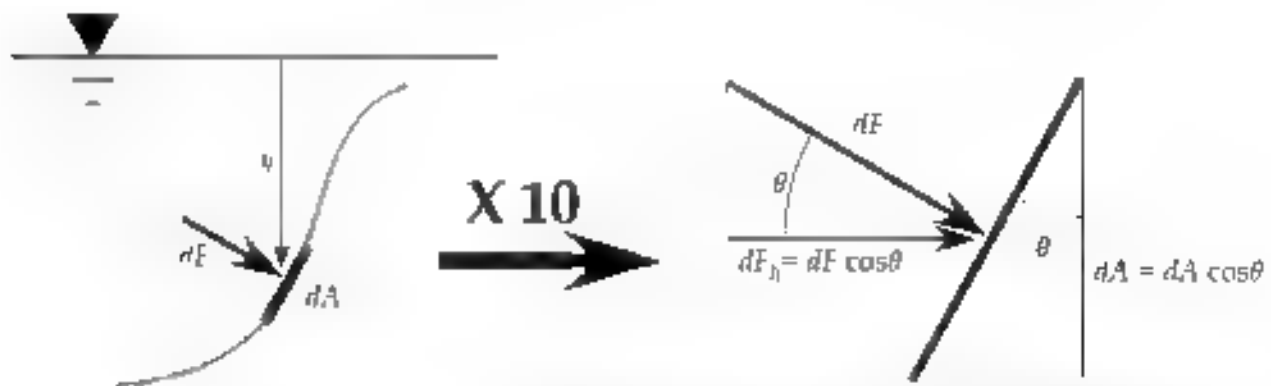


Figure 2.15 Composante horizontale de la force infinitésimale agissant sur un élément de surface

La composante horizontale de l'élément de force  $dF$  est donnée par

$$dF_h = dF \cos \theta$$

Alors

$$R_h = \int dF_h$$

$$R_h = \int_A P \cos \theta \, dA$$

Puisque la quantité  $dA \cos\theta$  représente la projection verticale  $dA_v$  de la surface  $dA$  (figure 2.15) alors

$$R_v = \int P \, dA_v$$

Si on compare ce résultat avec celui de l'équation (2.5) on remarque qu'ils sont de la même forme. En conséquence, tout se passe comme si on établissait les caractéristiques de la force agissant sur une surface plane verticale (la surface  $A_v$  cette dernière correspondant à la projection sur le plan vertical de la surface courbe). Ces considérations nous permettent donc de conclure quant au calcul de  $R_v$  et de l'établissement de sa ligne d'action. Puisque  $R_v$  peut être vue comme la force agissant sur la surface plane  $A_v$  on peut lui associer un centre pression  $C$  situé à la profondeur  $y_C$  et on peut faire usage des formules (2.10) et (2.11) (en les adaptant à la situation, bien sûr).

$$R_v = \rho g \bar{y}_G A_v \quad (2.12)$$

$$y_C = \frac{I_G}{\bar{y}_G A_v} + \bar{y}_G \quad (\sin\theta = 1) \quad (2.13)$$

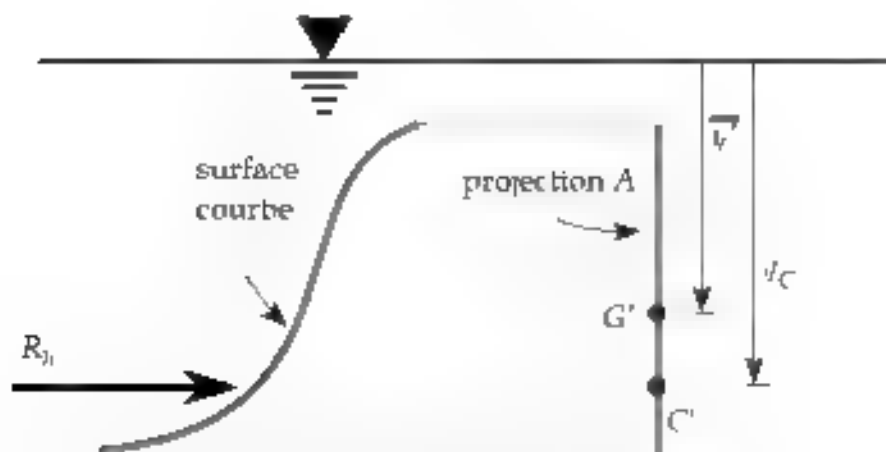


Figure 2.16 Grandeurs pertinentes au calcul de  $R_v$

### 2.4.2 Composante verticale $R_v$

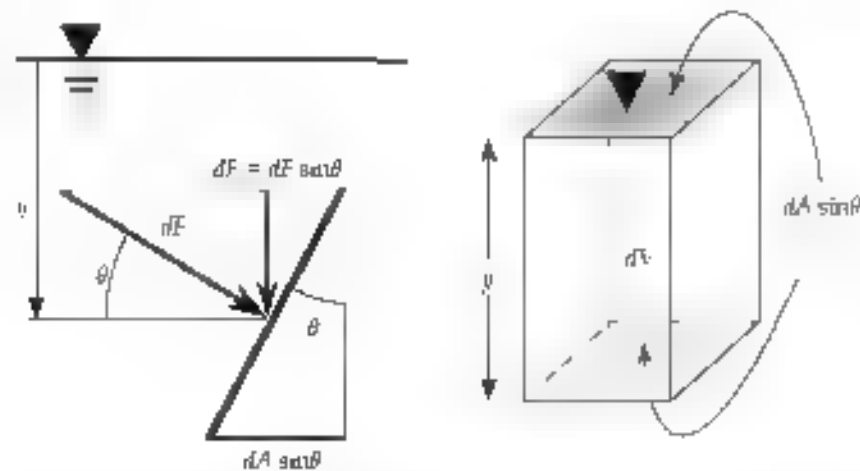


Figure 2.17 Composante verticale de la force infinitésimale agissant sur un élément de surface

La composante verticale de l'élément de force  $dF$  est donnée par

$$dF_v = dF \sin \theta$$

puisque

$$dF = P \, dA = \rho g y \, dA$$

$$R_v = \int_A dF \sin \theta = \int_A \rho g y \sin \theta \, dA$$

Retenant à la figure 2.17 on observe que la quantité  $y \sin \theta \, dA$  correspond à un volume le volume infinitésimal  $dV$  entre la surface mouillée et le niveau libre. Alors,

$$R_v = \rho g \int dV$$

$$R_v = \rho g V \quad (2.14)$$

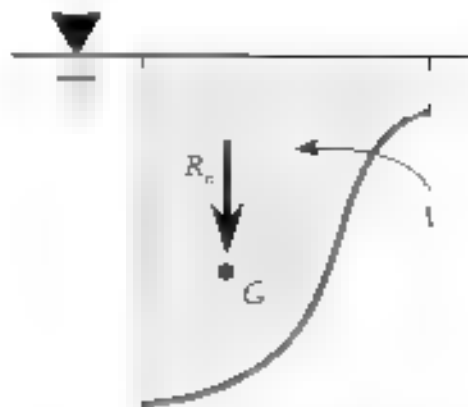


Figure 2.18 Volume qui intervient dans le calcul de  $R_v$  et ligne d'action de celle-ci

Si la force exercée par le fluide agit vers le haut, le calcul de  $R_v$  s'effectue de la même façon. Notons que le volume qui apparaît dans (2.14) reste le volume délimité par la surface et le niveau libre (figure 2.19).

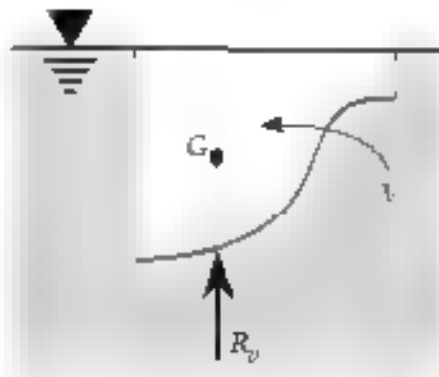


Figure 2.19 La composante verticale  $R_v$  agissant vers le haut

En tout état de cause, on observe que la formule 2.12 calcule un poids. Le poids du fluide qui occupe le volume au-dessus de la surface dans le cas de la situation de la figure 2.18, ou le poids du fluide qui occuperait cette région dans le cas de la situation illustrée à la figure 2.19. De ce fait, la ligne d'action de  $R_v$  doit passer par le centre de gravité de cette région.

**Exemple 2.3** La figure ci-dessous représente une porte d'isolation de longueur  $l = 6$  m et de masse négligeable vue de profil, et qui peut tourner autour de l'axe passant par  $O$ . Elle est en contact avec de l'eau à sa gauche et est maintenue en position par la force  $F$ . Que vaut  $F$ ?

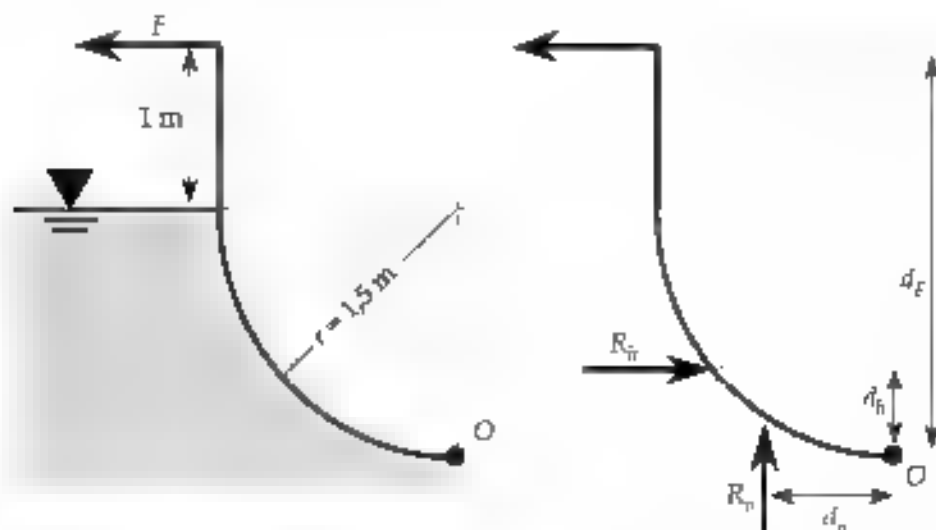


Figure 2.20 La porte d'isolation et son diagramme de forces

Somme des moments par rapport à  $O$ :  $\sum M_O = 0$

$$\sum M_O = Fd_F - R_h d_h - R_v d_v = 0$$

Grandeur et ligne d'action de  $R_v$

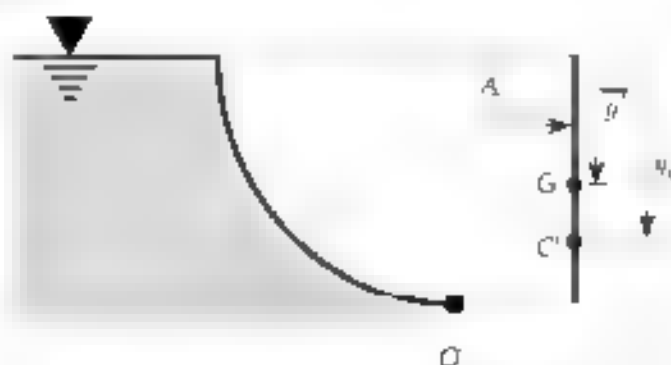


Figure 2.21 Paramètres d'intérêt pour le calcul de  $R_v$

$$R_v = \rho g \bar{y} A \quad \text{ou} \quad A = rL \quad \bar{y} = \frac{r}{2}$$

$$R_v = \frac{\rho g L r}{2} = 66,2 \text{ kN}$$

$$r_G = \frac{7}{8} r = 1 \text{ m}$$

$$d_v = r - r_G = 0,5 \text{ m}$$

Grandeur et ligne d'action de  $R_c$

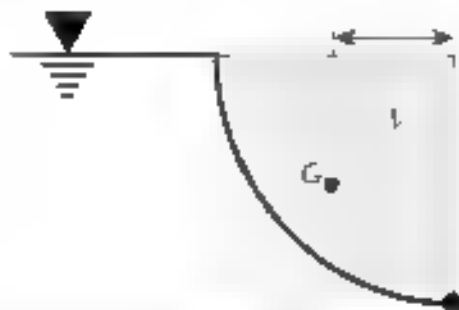


Figure 2.22 Paramètres d'intérêt pour le calcul de  $R_c$

$$R_c = \rho g \bar{y} A \quad \text{avec} \quad \bar{y} = \frac{7r}{8}$$

$$R_c = \rho g L \frac{7r}{4} = 104 \text{ kN}$$

$$d_c = \frac{4r}{7} = 0,637 \text{ m}$$

Calcul de F

$$F = \frac{R_v d_v + R_c d_c}{d_f} = 29,7 \text{ kN}$$



## 2.5 Poussée d'Archimède

On veut calculer la poussée verticale  $R$  s'exerçant sur un corps submergé (figure 2.23 a).

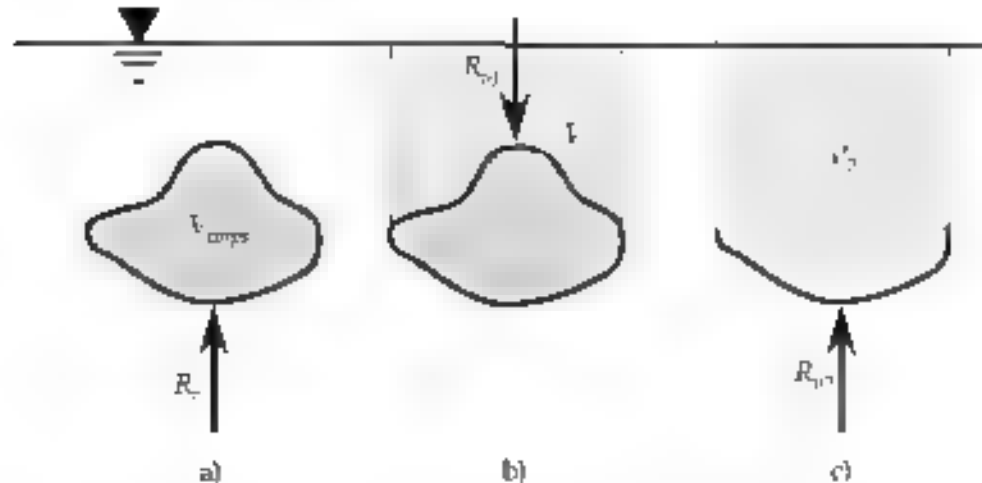


Figure 2.23 Calcul de la poussée d'Archimède

Sur la partie supérieure de sa surface agit  $R_{v1}$  (figure 2.23 b) et sur la partie inférieure, agit  $R_{v2}$  (figure 2.23 c).

On a

$$R_{v1} = \rho g V_1 \quad R_{v2} = \rho g V_2$$

Or la force résultante selon la verticale est donnée par

$$R_0 = R_{v2} - R_{v1} = \rho g (V_2 - V_1)$$

$$R_0 = \rho g V_{\text{déplacé}}$$

$$R_0 = \rho g V_{\text{fluide déplacé}} \quad (2.15)$$

La poussée que ressent un corps submergé correspond au poids du fluide déplacé par le corps (principe d'Archimède). Fait intéressant à noter : dans ce cas où le corps est complètement immergé, la grandeur de la poussée d'Archimède est indépendante de la profondeur du corps.

**Exemple 2.4** Un corps de masse volumique  $\rho_{\text{corps}}$  est en suspension dans un fluide de masse volumique  $\rho_0$ . Établissez la relation entre les masses volumiques.

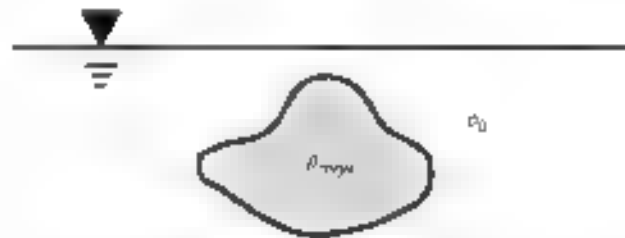


Figure 2.25 Un corps en suspension dans un fluide

Seules les forces de poids et de la poussée d'Archimède agissent sur le corps.

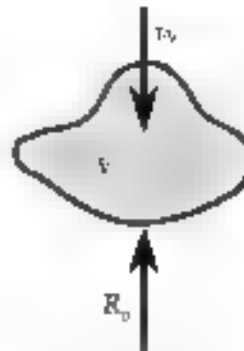


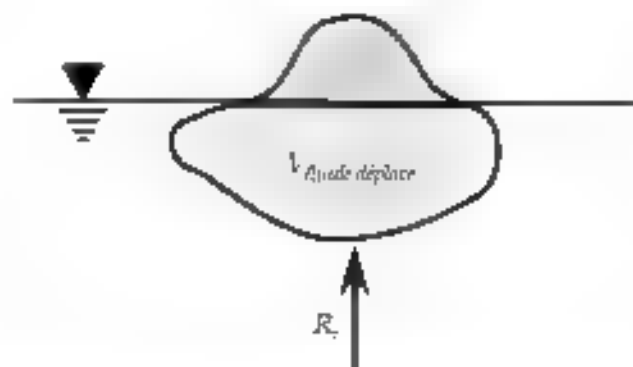
Figure 2.26 Diagramme de forces agissant sur le corps.

Puisque le corps est en équilibre, il vient

$$\begin{aligned} W &= R_0 \\ \rho_{\text{corps}} g V &= \rho_0 g V \\ \rho_{\text{corps}} &= \rho_0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour qu'un corps se maintienne en suspension dans un fluide, il doit présenter la même densité que le fluide. S'il est plus ou moins dense que le fluide, le poids ou la poussée d'Archimède prédominera et le corps se verra une force résultante qui le fera descendre ou monter, selon le cas.

L'énoncé du principe d'Archimède (équation (2.15)) tient toujours dans le cas que le corps n'est que partiellement submergé (voyez ci-dessous).



**Figure 2.24** Poussée d'Archimède, corps partiellement submergé



## 2.6 EXERCICES

**Problème 1** Calculez la pression relative en A, B, C et D de la figure P 2.1

Rép. : 5,89 kPa; 5,89 kPa; 5,89 kPa, 22,66 kPa

**Problème 2** Sur le dispositif de la figure P 2.2 Établissez la pression relative en A en Pa et son équivalent en hauteur de colonne de mercure. Considérez que

$h_1 = 20$  cm,  $h_2 = 30$  cm,  $l = 40$  cm,  $\theta = 30^\circ$ , et  $\sigma_{Hg} = 13,6$ .

Rép.  $P_{abs} = 64,7$  kPa ou 485,6 mmHg

**Problème 3** Un piston de 15 cm de diamètre est installé dans une cylindre connecté à un tube incliné comme illustré à la figure P 2.3. Le fluide manométrique est de l'huile de densité 0,85. Quand un poids  $W$  est placé sur le piston, le niveau de fluide passe du niveau 1 au niveau 2. Quel est le poids  $W$  si on suppose que le changement de position du piston est négligeable?

Rép.  $W = 11,05$  N

**Problème 4** Un manomètre en U mesure la différence de pression entre deux points A et B dans un liquide de masse volumique  $\rho_1$ . Le manomètre contient du mercure de masse volumique  $\rho_2$  (figure P 2.4).

a) Exprimez la différence de pression  $P_A - P_B$  en fonction des paramètres de la figure.

b) Sachant que  $a = 1,5$  m,  $b = 0,75$  m,  $\rho_1 = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 13600$  kg/m<sup>3</sup> et  $h = 0,5$  m, calculez  $P_A - P_B$ .

Rép. 54,5 kPa

**Problème 5** Calculez la différence de pression qui cause un déplacement  $l$  de 10 cm le long d'un tube incliné à  $15^\circ$ . L'appareil contient de l'huile ( $\sigma = 0,8$ ). Les diamètres du réservoir et du tube incliné sont de 20 cm et 5 mm, respectivement (figure P 2.5).

Rép. 203,6 Pa

**Problème 6** La figure P 2.6 montre deux réservoirs d'eau reliés entre eux par un manomètre en U inversé contenant du mercure. Exprimez la différence de pression en fonction des paramètres de la figure.

$$\text{Rép. } P_A - P_B = \rho g (H_1 + h_1 - H_2 - h_2) + \rho_{Hg} g (h_1 - h_2)$$

**Problème 7** La chute de pression entre deux points d'une conduite traversée par un fluide de masse volumique  $\rho$ , est mesurée à l'aide d'un manomètre utilisant un liquide de masse volumique  $\rho_{\text{man}}$  (figure P 2.7). Exprimez  $P_B - P_A$  en fonction des paramètres de la figure.

$$\text{Rép. } P_B - P_A = g (\rho_{\text{man}} h_1 - \rho (h_1 + h_2))$$

**Problème 8** Le manomètre en U illustré à la figure P 2.8 est utilisé pour mesurer la pression relative dans une conduite d'eau. La branche de droite contient du mercure ( $\sigma = 13,6$ ) dont le niveau libre est à 20 cm au-dessus du point A. Le niveau de séparation de l'eau et du mercure dans la branche de gauche se situe à 30 cm sous A. Calculez :

- La pression relative en A.
- La nouvelle valeur pour  $\sigma$  si la pression dans la conduite est réduite de 40 kPa.

$$\text{Rép. a) } P_A = 63,8 \text{ kPa}$$

$$\text{b) } \sigma = 19 \text{ cm}$$

**Problème 9** La vanne circulaire de la figure P 2.9 est présentée de profil (à gauche) et de face (à droite), respectivement. Elle pivote autour d'un axe passant par le point P situé à 10 cm sous le centre de gravité. Le diamètre de la vanne est de 1,8 m. Quelle est la hauteur  $h$  du niveau à partir de laquelle la porte va s'ouvrir (c'est-à-dire pour laquelle  $R$  provoque un moment horaire par rapport au pivot)?

$$\text{Rép. } h = 1,125 \text{ m}$$

**Problème 10** Une plaque rectangulaire de 5 m sur 3 m et de masse négligeable pouvant pivoter autour d'un point O est retenue par un contre-poids comme l'illustre la figure P 2 10. Si l'angle d'inclinaison de la vanne est de 60°, déterminez la profondeur de l'eau pour que la vanne reste en équilibre.

a) Montrez que dans ce cas (plaque rectangulaire partiellement submergée), la profondeur du centre de pression est donnée par  $y_c = \frac{2}{3}d$

b) Calculez  $d$

Rép.  $d = 2,66$  m

**Problème 11** La vanne AB en forme de quart de cylindre peut tourner autour du point C comme le représente la figure P 2.11. Déterminez et situez les composantes de la force hydrostatique par unité de largeur qui s'exercent sur la vanne

Rép.  $F_y = 19,6$  kN/m ;  $y = 1,73$  m

$F_x = 30,8$  kN/m ;  $x = 0,849$  m

**Problème 12** Soit une vanne de largeur  $L$  qui peut s'ouvrir automatiquement par une rotation autour d'un axe passant par O, figure P 2 12. Calculez la profondeur  $D$  pour laquelle la vanne va s'ouvrir si on néglige sa masse.

Rép.  $D = 2,6$  m

**Problème 13** La vanne que représente la figure P 2 13 est articulée au point H situé à  $d = 1$  m de profondeur. La vanne est de forme carrée de 2 m de côté et son poids est négligeable. Quelle force doit-on exercer à son extrémité pour qu'elle reste en position?

Rép.  $F = 32,7$  kN

**Problème 14** La plaque rectangulaire de 1,8 m par 4 m de la figure P 2 14 est retenue par le support O. Supposant que la composition de la plaque est homogène, déterminez le poids nécessaire de la plaque pour qu'elle se maintienne en position

Rép. 486,6 kN

**Problème 15** Un barrage de béton de 3 m de largeur présente une surface mouillée constituée d'une surface verticale de 10 m de hauteur terminée par un quart de cercle de rayon 1 m (voir figure P 2.15).

- Calculez la composante horizontale  $R_h$  de la force hydrostatique s'exerçant sur le barrage et la profondeur à laquelle elle agit.
- Calculez la composante verticale  $R_v$  et la distance  $d_v$  entre la ligne d'action de celle-ci et la surface droite du barrage.

Rép. : a)  $R_h = 1187 \text{ kN}$ ,  $y_c = 7,33 \text{ m}$   
 b)  $R_v = 211,6 \text{ kN}$ ,  $d_v = 0,506 \text{ m}$

**Problème 16** Une plaque de forme circulaire de rayon  $r$  est tout juste submergée (figure P 2.16).

- Établissez  $R$  ainsi que la profondeur du centre de pression en fonction de  $r$  et  $\theta$ .
- Sachant que  $r = 0,5 \text{ m}$  et  $\theta = 30^\circ$  calculez  $R$ ,  $y_c$  et le moment de force de  $R$  au point A.

Rép. : a)  $R = \pi \rho g r^3 \sin \theta$ ,  $y_c = 5r / 4 \sin \theta$   
 b)  $R = 1926 \text{ N}$ ,  $y_c = 0,3125 \text{ m}$ ,  $M_A = 722,3 \text{ Nm}$

**Problème 17** Considérez le barrage de béton de la figure P 2.17. Sa surface mouillée est de forme parabolique.

- Calculez  $R_h$  ainsi que sa profondeur  $y_c$ .
- Calculez  $R_v$  ainsi que la position  $d_v$  de sa ligne d'action relativement au point B.
- Calculez le moment de force produit par les forces hydrostatiques par rapport au point A.

Rép. : a)  $R_h = 1,017 \text{ MN}$ ,  $y_c = 4,8 \text{ m}$   
 b)  $R_v = 1,130 \text{ MN}$ ,  $d_v = 2,25 \text{ m}$   
 c)  $M_A = 4,357 \text{ MNm}$



**Problème 18** Une sphère en polypropylène immergée dans de l'eau est retenue au fond par un câble tel qu'il est illustré à la figure P 2.18. Sachant que le rayon de la sphère est de 1 m et que sa masse volumique est  $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$ , calculez la tension dans le câble.

Rép. 4109 N

**Problème 19** Un ressort de longueur au repos  $l_0 = 1 \text{ m}$  et de constante de rappel  $k = 5 \text{ kN/m}$ , est relié à un cylindre partiellement immergé comme il est illustré à la figure P 2.19. Le cylindre fait d'aluminium  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$  a un rayon de 18 cm et une hauteur de 50 cm. De quelle profondeur  $h$  s'enfoncé-t-il dans l'eau ?

Rép.  $h = 29,1 \text{ cm}$

**Problème 20** Un cube d'aluminium ( $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ ) est équilibré par une masse de 2 kg lorsqu'il est immergé dans de l'éthanol à 20°C (figure P 2.20). Quelle est la longueur  $l$  de l'arête du cube ?

Notez que les bras de la balance sont de même longueur

Rép.  $l = 10,15 \text{ cm}$

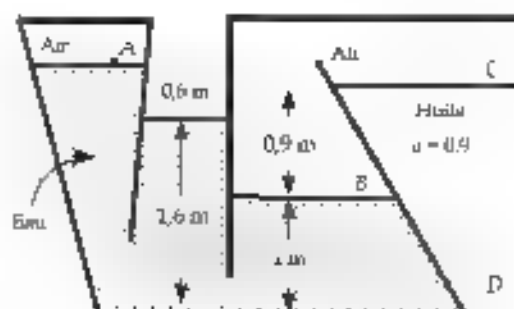


Figure P 2.1

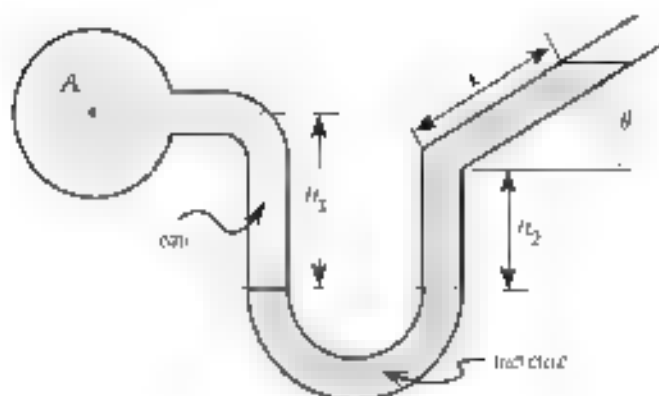


Figure P 2.2

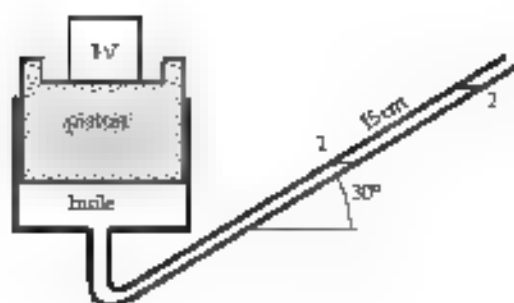


Figure P 2.3

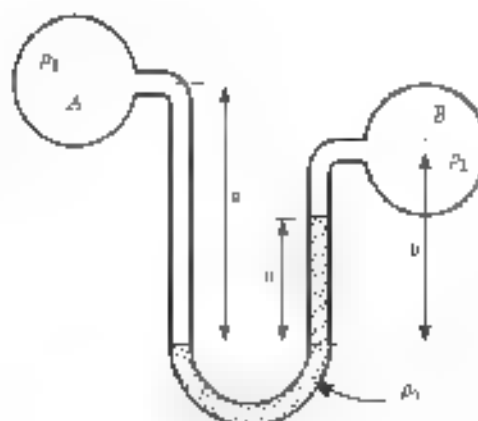


Figure P 2.4



Figure P 2.5

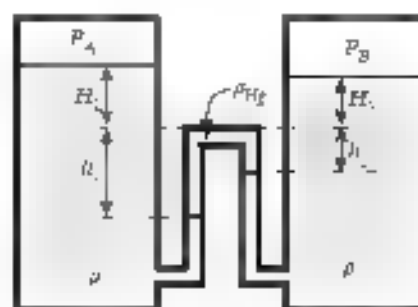


Figure P 2.6

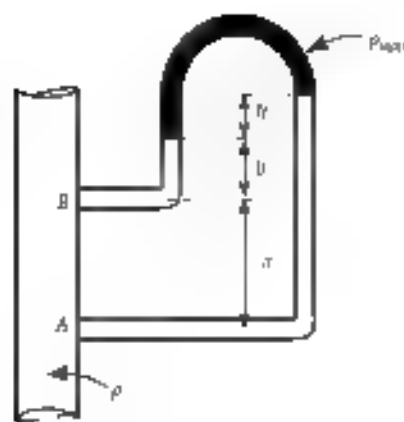


Figure P 2.7

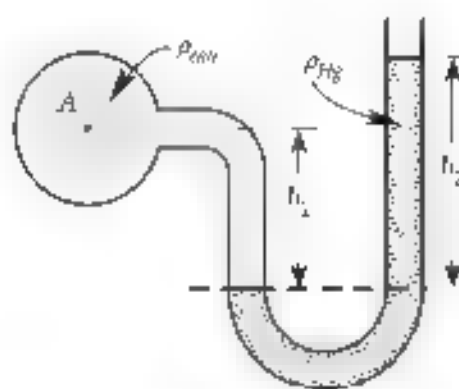


Figure P 2.8

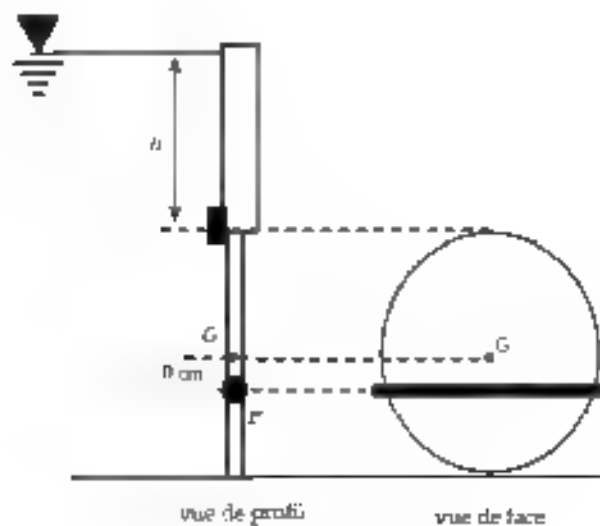


Figure P 2.9

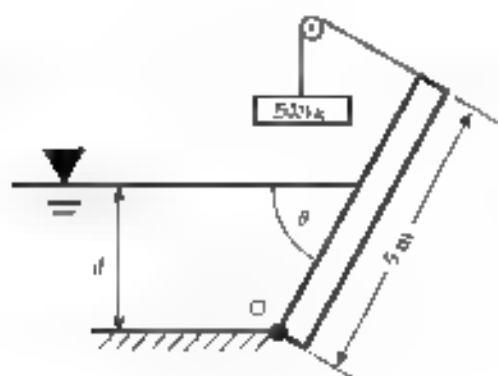


Figure P 2.10

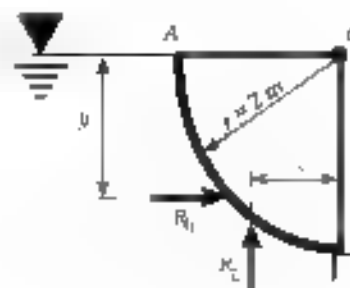


Figure P 2.11

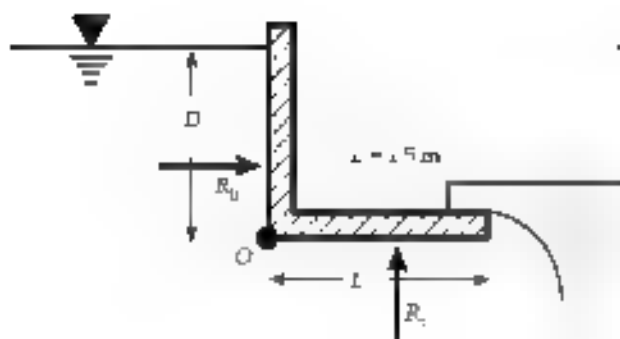


Figure P 2.12

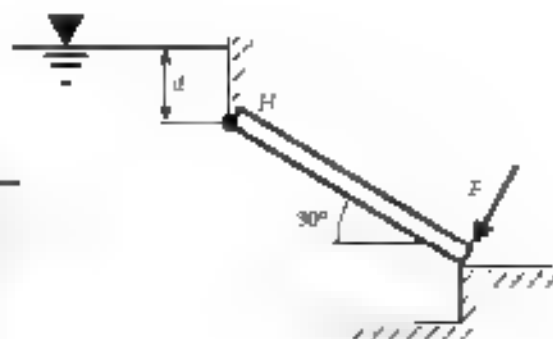


Figure P 2.13

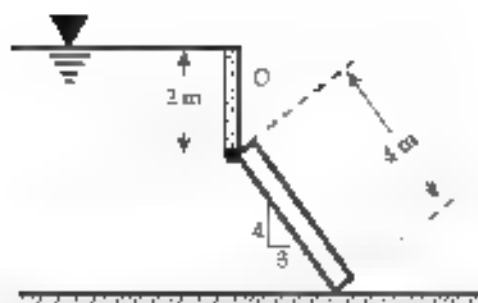


Figure P 2.14

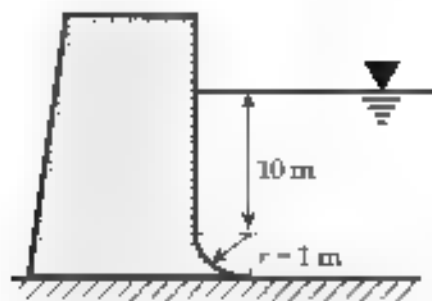


Figure P 2.15

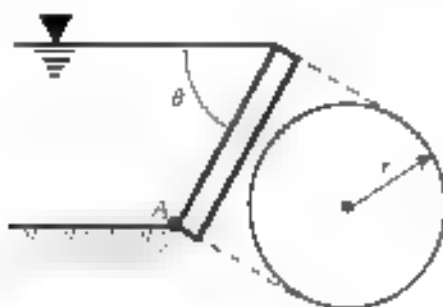


Figure P 2.16

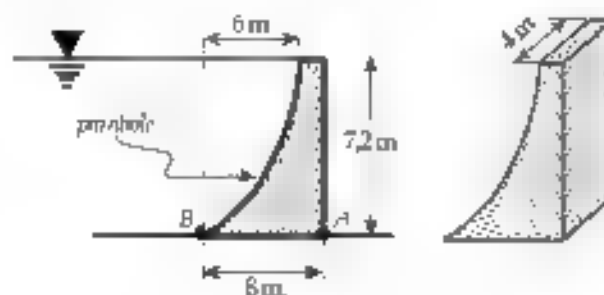


Figure P 2.17

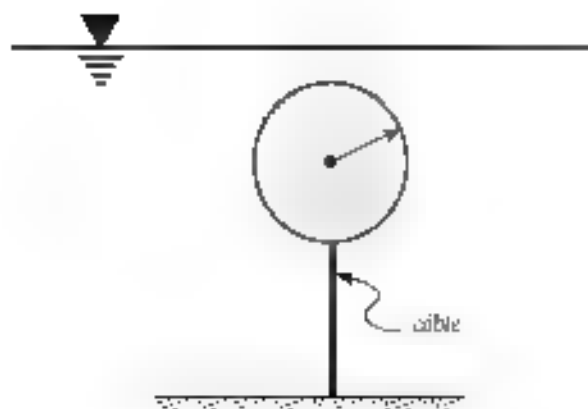


Figure P 2.18

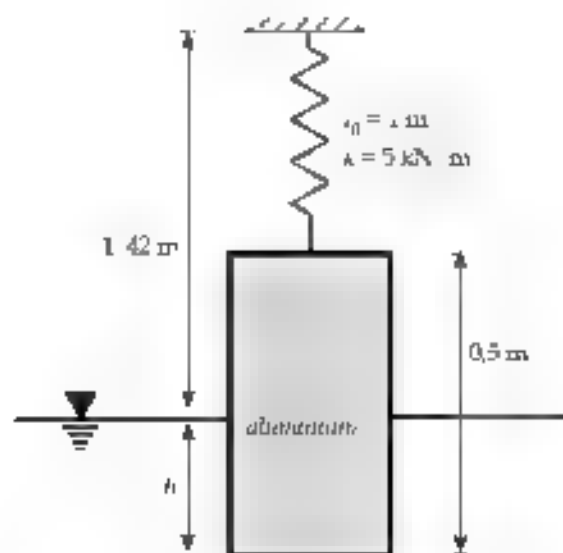


Figure P 2.19

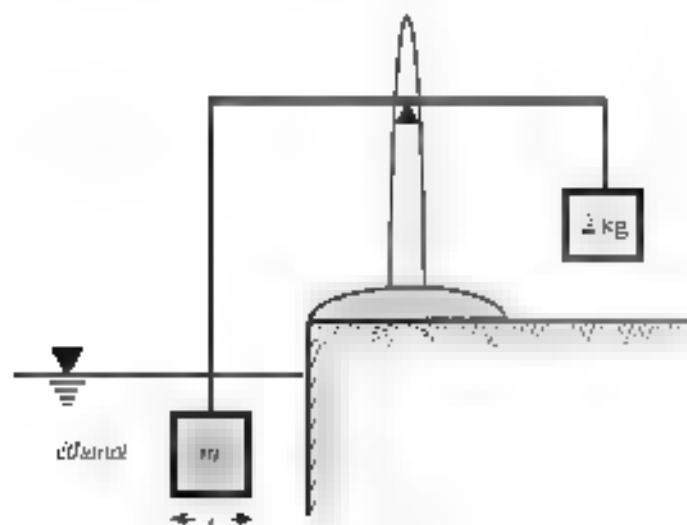


Figure P 2.20



## CHAPITRE 3

### CONCEPTS DE BASE DES FLUIDES EN ÉCOULEMENT

#### Table des matières

<b>3.1</b>	<b>Approches lagrangienne et eulérienne</b>	<b>3</b>
<b>3.2</b>	<b>Classification des écoulements</b>	<b>3</b>
3.2.1	Fluides idéal et réel	3
3.2.2	Écoulements stationnaire et uniforme	4
3.2.3	Écoulements compressibles et incompressibles	5
<b>3.3</b>	<b>Lignes de courant</b>	<b>5</b>
<b>3.4</b>	<b>Écoulements laminaires et turbulents</b>	<b>6</b>
<b>3.5</b>	<b>Systèmes et volumes de contrôle</b>	<b>8</b>
<b>3.6</b>	<b>Théorème du transport</b>	<b>9</b>
3.6.1	Calcul des débits	11
<b>3.7</b>	<b>ANNEXE Formule générale du calcul du débit de <math>B</math></b>	<b>13</b>





### 3.1 Approches lagrangienne et eulérienne

Un fluide est constitué d'un nombre astronomique de particules, chacune de ces-ci étant caractérisée par sa vitesse, son accélération, son énergie, etc. En général, les propriétés de ces particules de fluide diffèrent d'une à autre et peuvent de plus évoluer dans le temps. Deux approches pour traiter le problème de la caractérisation et la description d'un écoulement ont été avancées.

L'approche de Lagrange s'intéresse au comportement des particules individuelles et de l'évolution de leurs propriétés particulières dans le temps. Ainsi, une description complète d'un écoulement implique la connaissance de chaque propriété de chaque particule à tout instant, une tâche formidable donc.

L'approche d'Euler quant à elle, considère ce qui se passe en un point de l'écoulement en fonction du temps sans chercher à déterminer quelle particule occupe cette position à l'instant considéré. Les différentes grandeurs physiques ne sont plus des caractéristiques de particules déterminées mais du point. Ces grandeurs deviennent alors fonctions de la position et du temps. Par exemple, pour la pression, la masse volumique et la vitesse, on aura

$$P = P(x, y, z, t) \quad ; \quad \rho = \rho(x, y, z, t) \\ \mathbf{v} = v_x(x, y, z, t) \mathbf{i} + v_y(x, y, z, t) \mathbf{j} + v_z(x, y, z, t) \mathbf{k}$$

Une grandeur physique fonction de la position et du temps s'appelle un « champ ». Certaines de ces fonctions retournent un scalaire comme résultat (par exemple, la pression et la masse volumique) et d'autres, un vecteur (la vitesse, par exemple).

### 3.2 Classification des écoulements

#### 3.2.1 Fluides idéal et réel

Un fluide est dit idéal (ou parfait) quand sa viscosité est nulle (ainsi que sa conductivité thermique). Cette hypothèse permet manifestement de beaucoup simplifier l'étude de l'écoulement. À titre d'exemple, l'absence de viscosité rend inopérante la condition de non-glissement. En conséquence, un écoulement s'effectuant entre deux plaques présentera le profil de vitesse de la figure 3.1 a) (qu'on dénommera écoulement uniforme). En contrepartie, l'écoulement d'un fluide réel sera caractérisé par une vitesse variant d'un point à autre (figure 3.1 b)).



Figure 3.1 Écoulements de fluides idéals et réels

### 3.2.2 Écoulements stationnaire et uniforme

Les propriétés des fluides peuvent varier en fonction de l'espace et du temps. Quand ces propriétés sont constantes dans le temps on dit que l'écoulement est stationnaire. Cependant, si l'une de ces propriétés se modifie dans le temps, l'écoulement est dit non stationnaire. De façon similaire, un écoulement pour lequel les propriétés ne varient pas en fonction de la position est dit uniforme et non uniforme sinon.

Écoulement stationnaire et uniforme :

exemple :  $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{i}$

Écoulement stationnaire et non uniforme

exemple :  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + \frac{v_y}{y} \mathbf{j}$

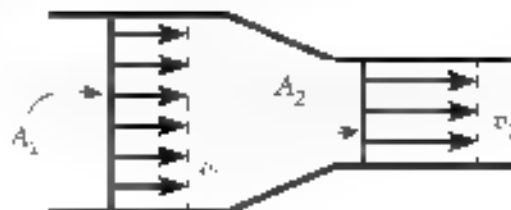
Écoulement non stationnaire et uniforme

exemple :  $\mathbf{v} = (5t + v_0) \mathbf{i}$

Écoulement non stationnaire et non uniforme :

exemple :  $\mathbf{v} = 5x(1 + t) \sqrt{1 + y^2} \mathbf{k}$

**Note** La figure qui suit illustre une situation assez commune où la vitesse change entre deux points de l'écoulement : elle passe de  $v_1$  à  $v_2$ . L'écoulement n'est en conséquence pas uniforme. Toutefois, la vitesse ne varie pas quand on passe d'un point à l'autre de la surface  $A_1$  ou de la surface  $A_2$ . On dira donc que la vitesse est uniforme sur ces surfaces.

Figure 3.2 Écoulement uniforme sur les sections  $A_1$  et  $A_2$

### 3.2.3 Écoulements compressibles et incompressibles

Tous les fluides sont *a priori* compressibles. Dans certaines situations d'écoulement toutefois, les variations de masse volumique sont négligeables en regard des variations des autres quantités d'intérêt. On dira alors que l'écoulement est incompressible. C'est notamment le cas pour la plupart des écoulements de liquides.

Écoulement incompressible

$$\rho = \text{cte}$$

Écoulements compressibles

$$\rho = \rho(t) \quad \text{ou} \quad \rho = \rho(x, y, z), \quad \text{ou} \quad \rho = \rho(\eta, \zeta, t)$$

### 3.3 Lignes de courant

Une ligne de courant est une ligne qui est partout tangentielle au vecteur vitesse local. (analogue des lignes de champ électrique et magnétique à l'instant considéré)

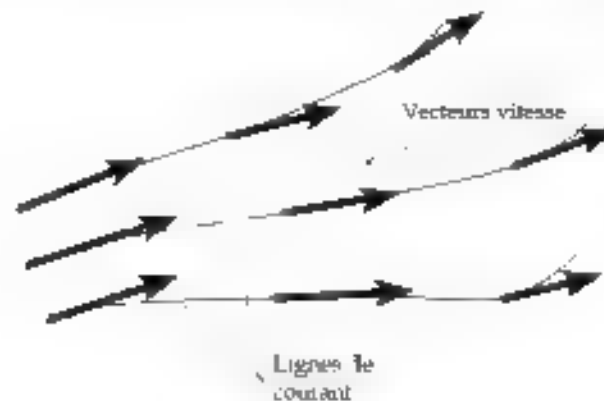
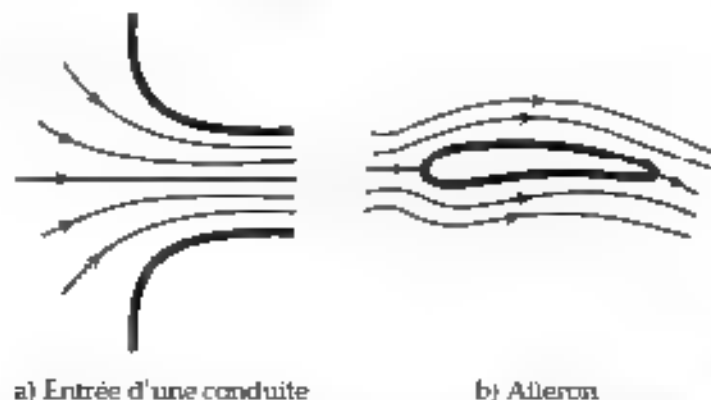


Figure 3.3 Lignes de courant

Les lignes de courant constituent un outil de visualisation utile. En particulier, en situation d'écoulement stationnaire, elles correspondent aux trajectoires des particules.



a) Entrée d'une conduite

b) Alleron

Figure 3.4 Les lignes de courant correspondent aux trajectoires en situation d'écoulement stationnaire

On peut définir une région de forme cylindrique centrée sur une ligne de courant qu'on nomme tube de courant (figure 3.4). La région ne comporte qu'une entrée et une sortie de surfaces infinitésimales. Il n'y a donc aucun transport de masse à travers la paroi latérale du tube (figure 3.5).

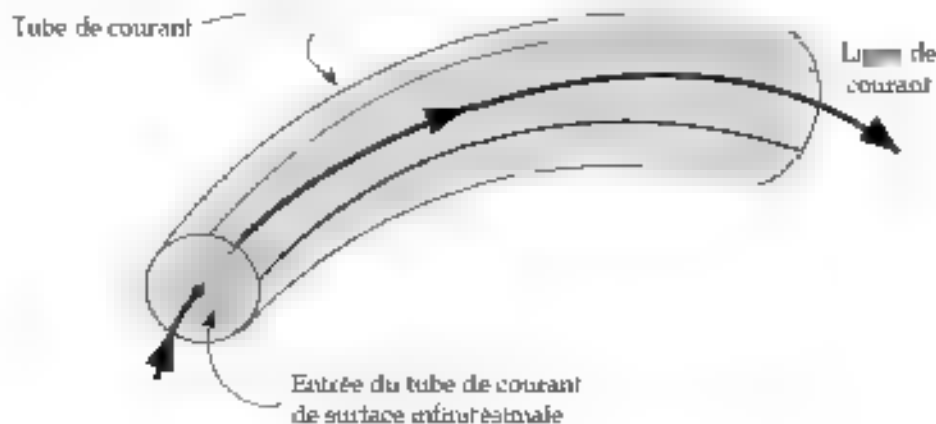


Figure 3.5 Tube de courant

### 3.4 Écoulements laminaires et turbulents

Les écoulements de fluides réels (donc visqueux) sont classifiés en écoulements laminaires ou turbulents. Un écoulement laminaire est caractérisé par un mouvement ordonné des particules et le fluide semble être constitué de « lamelles » glissant les unes sur les autres. Dans cette situation, les forces visqueuses dominent sur les effets d'inertie (qui entraînent l'apparition de désordre). En conséquence, les échanges de masse d'une lamelle à l'autre se font à l'échelle microscopique uniquement et le mélange est pratiquement inexistant.

L'écoulement turbulent est caractérisé par un déplacement désordonné des particules et souvent par l'apparition de tourbillons longitudinaux ou transversaux. Il donnera donc lieu à un mélange intense du fluide. La vitesse, l'accélération et les autres propriétés de la particule deviennent alors imprévisibles.

Reynolds conçut une expérience permettant d'explorer les comportements décrits plus haut. Dans une conduite circulaire à travers laquelle s'écoulait de l'eau, il pensa injecter de la teinture d'iode afin de visualiser le déplacement des particules de fluide. En faisant varier les paramètres de vitesse d'écoulement et de diamètre, il observa et caractérisa la transition d'écoulement laminaire en écoulement turbulent. Il répéta par la suite l'expérience en changeant la nature du fluide en écoulement. C'est lui qui inventa le terme de « laminaire », lorsqu'il lui apparut que l'écoulement se rapportait à un ensemble de lamelles superposées.

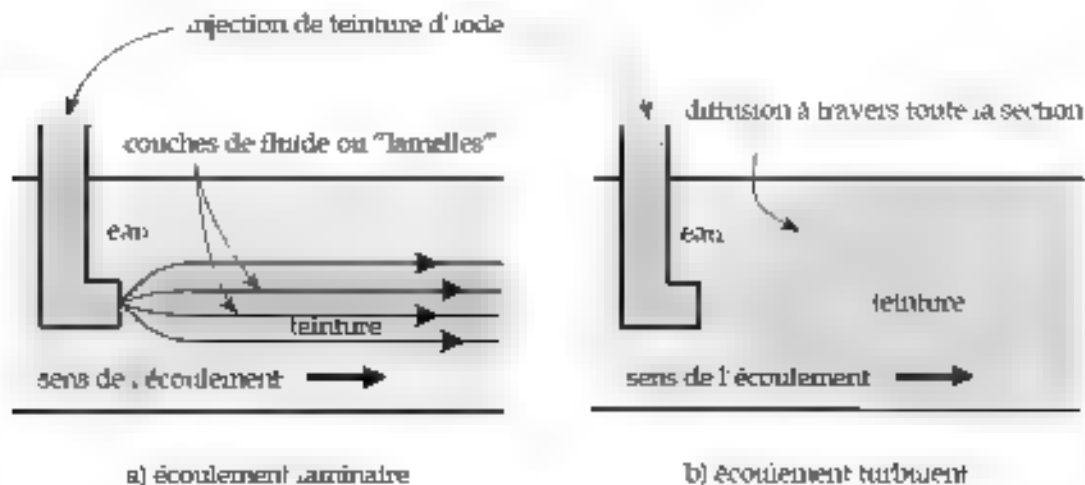


Figure 3.6 Expérience de Reynolds

Par le biais de l'analyse dimensionnelle il est possible de se doter d'une « mesure » qui permet la classification en termes d'écoulement laminaire ou turbulent. Cette grandeur, le nombre de Reynolds ( $Re$ ), correspond au rapport des forces d'inertie (qui induisent de la turbulence) et des forces de frottement visqueux (qui tendent à maintenir l'écoulement ordonné). À la suite, nous considérerons plus particulièrement les écoulements à travers des conduites. Dans ce cas, le nombre de Reynolds est défini par

$$Re = \frac{\rho \bar{v} D_H}{\mu} \quad (3-1)$$

Or, la viscosité cinématique est définie par :  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

on a donc, aussi :

$$Re = \frac{\rho \bar{v} D_H}{\mu} = \frac{\bar{v} D_H}{\nu} \quad (3-2)$$

où  $\bar{v}$  désigne la vitesse moyenne de l'écoulement (définie au chapitre 4) et  $D_H$  le diamètre hydraulique défini par

$$D_H = \frac{4(\text{section de passage})}{\text{périmètre mouillé}} \quad (3-3)$$

En particulier, pour une section circulaire de diamètre  $D$

$$D_H = D$$

L'observation a permis de dégager les critères suivants, en ce qui concerne les écoulements en conduite. L'écoulement est dit

laminaire si	$Re < 2000$
transitoire si	$2000 < Re < 4000$
turbulent si	$Re > 4000$

**Exemple 3.1** Une conduite de 4 cm de diamètre transporte de l'eau à 20°C. Quelle est la vitesse moyenne maximale permise pour que l'écoulement reste laminaire ?

Du tableau 1.1 on tire

$$\begin{aligned}\mu &= 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{s}} \\ \text{Re}_{\text{max}} &= \frac{\bar{v}_{\text{max}} D}{\nu} = 2000 \\ \bar{v}_{\text{max}} &= \frac{\text{Re}_{\text{max}} \nu}{D} = \frac{2000 \times 10^{-6}}{0.04} = 0.05 \text{ m/s}\end{aligned}$$

**Exemple 3.2** Une conduite à section rectangulaire de 20 cm x 40 cm transporte de l'air à 20°C. Quelle est la nature de l'écoulement si la vitesse moyenne est de 50 m/s et la viscosité cinématique de  $1,79 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

$$\begin{aligned}\text{Re} &= \frac{\bar{v} D_H}{\nu} \\ D_H &= \frac{4(0,2 \times 0,4)}{2(0,2 + 0,4)} = 0,26 \text{ m} \\ \text{Re} &= \frac{50 \times 0,26}{1,79 \times 10^{-5}} = 745000\end{aligned}$$

$\text{Re} > 4000$ , alors l'écoulement est turbulent.

### 3.5 Systèmes et volumes de contrôle

Pour être en mesure de formuler les lois physiques fondamentales et les appliquer, il faut un objet d'étude. Deux types de ces objets seront considérés ici : le système et le volume de contrôle.

Un système est constitué d'une masse de fluide *spécifique* (on peut penser que les atomes qui le constituent sont « marqués » en quelque sorte), et son étude consiste à en suivre l'évolution dans le temps. Toutefois, un système en écoulement se déplace constamment, sa forme peut changer, il peut même se scinder en plusieurs parties (figure 3.7).

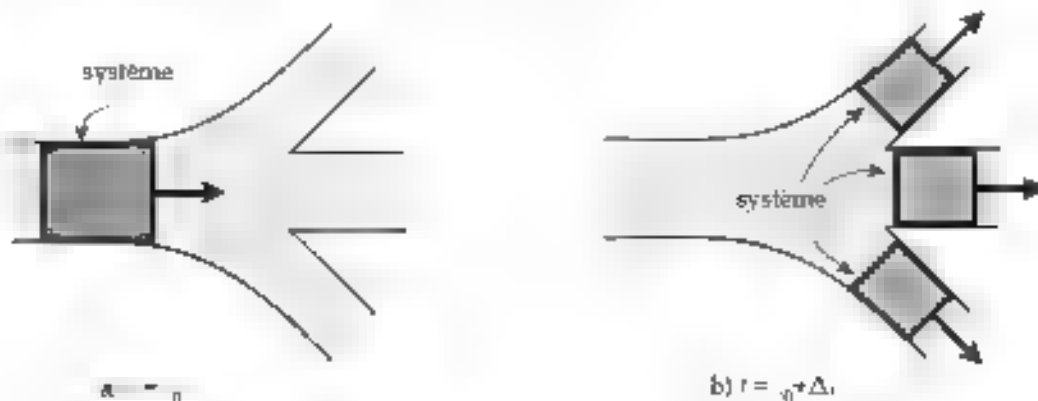


Figure 3.7 Évolution d'un système dans le temps

Un volume de contrôle est une région de l'espace désignée pour l'analyse. Le choix du volume de contrôle est complètement arbitraire. Il peut être de dimension finie ou infinitésimale, immobile ou en mouvement, ses limites elles-mêmes peuvent être fixes ou en mouvement.

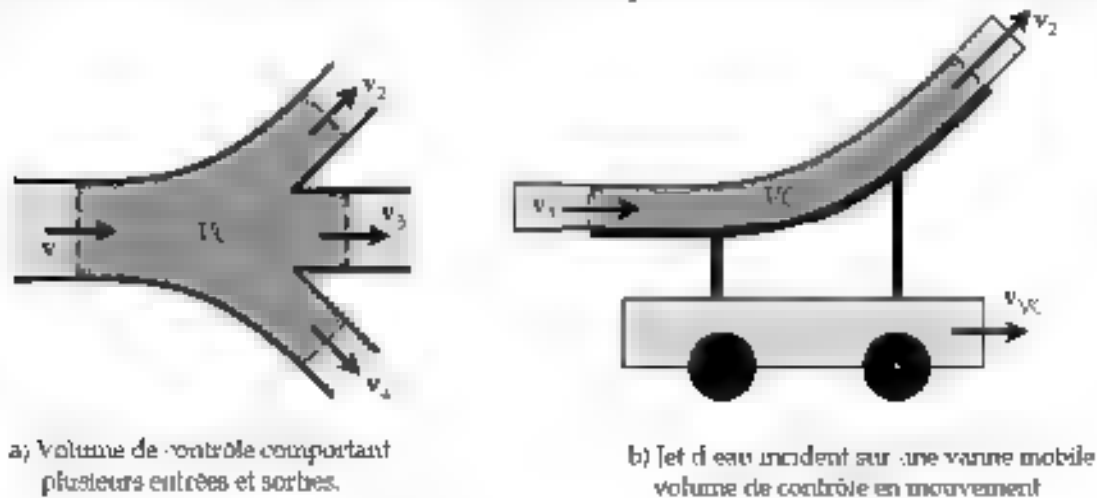


Figure 3.8 Exemples de volumes de contrôle

### 3.6 Théorème du transport

À la suite, nous établirons les équations fondamentales de la dynamique des fluides. Les lois physiques qu'elles incarnent (conservation de la masse, conservation de la quantité de mouvement et conservation d'énergie) s'appliquent à la matière, à des systèmes donc. Il faut en conséquence se doter d'un outil qui permette de traduire l'application de ces lois à des propriétés de certaines régions de l'espace (des volumes de contrôle ou des portions de ceux-ci). Cet outil, c'est le théorème du transport.

Considérons une propriété de la matière quelconque que l'on choisit étudier (dans le cas qui nous occupe il s'agira de la masse, de l'énergie ou de la quantité de mouvement) et désignons-la par  $B$ . Étant donné un volume de contrôle, on choisit comme système la masse qu'il occupe à  $t = t_0$  (figure 3.9 a).

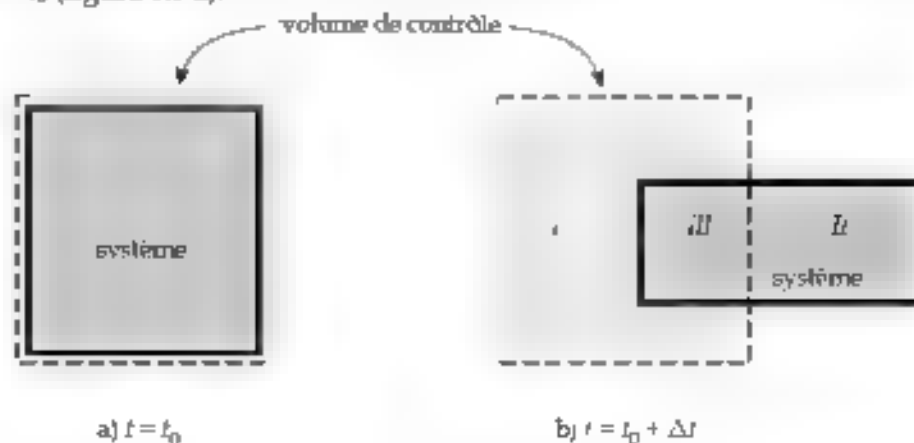


Figure 3.9 Théorème du transport

Du fait de l'écoulement, à  $t + \Delta t$  une partie du système a évacué le volume de contrôle : le système occupe désormais les régions II et III. Pour la même raison, une portion du volume de contrôle, la région I, est maintenant occupée par du fluide n'appartenant pas au système.

On veut caractériser l'évolution de la propriété du système  $B_{sys}$  en fonction du temps.

Désignons par  $B_{vc}$  la propriété  $B$  de la matière occupant le volume de contrôle.

On a donc que

$$B_{sys}(t_0) = B_{vc}(t_0)$$

Toutefois, à  $t + \Delta t$ ,  $B_{sys}$  devient

$$B_{sys}(t_0 + \Delta t) = B_{vc}(t_0 + \Delta t) + \delta B_{II} - \delta B_I$$

Remarquons que puisque  $B$  est une propriété de la matière, elle lui est « attachée ». Ainsi, la portion du système qui a évacué le volume de contrôle (région I) transporte avec elle la quantité de  $B$  qui lui est associée,  $\delta B_I$ . À titre d'exemple, si  $B$  représente l'énergie  $E$ , alors  $\delta E_I$  quantifie l'énergie qui sort du volume de contrôle avec la masse à laquelle elle appartient en raison de l'écoulement. Manifestement,  $\delta B$  joue le même rôle pour la masse qui entre dans le volume de contrôle.

En divisant par l'intervalle de temps que l'on fait tendre vers 0 :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta B_{sys}}{\Delta t} = \frac{\Delta B_{vc}}{\Delta t} + \frac{\delta B_{II}}{\Delta t} - \frac{\delta B_I}{\Delta t}$$

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{dB_{vc}}{dt} + \dot{B}_{II} - \dot{B}_I \quad (3-4)$$

$\frac{dB_{sys}}{dt}$  représente le taux de variation de la propriété  $B$  du système.

$\frac{dB_{vc}}{dt}$  représente le taux de variation de la propriété  $B$  de la masse occupant le volume de contrôle.

$\dot{B}_I$  et  $\dot{B}_{II}$  sont les débits de  $B$  associés aux masses qui entrent dans le volume de contrôle et qui en sortent respectivement. Ils mesurent donc les quantités de  $B$  traversant les frontières du volume de contrôle par unité de temps en raison de l'écoulement.

La différence  $\dot{B}_{II} - \dot{B}_I$  correspond au débit net de  $B$  sortant du volume de contrôle. En général, son calcul peut être laborieux (voyez annexe à la fin du chapitre). Si, toutefois, le volume de contrôle ne comporte qu'un nombre fini d'entrées et de sorties, l'équation (3-4) peut se récrire

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{dB_{vc}}{dt} + \sum_j \dot{B}_j - \sum_k \dot{B}_k \quad (3-5)$$



Où les symboles  $\sum_i$  et  $\sum_e$  désignent les sommes sur l'ensemble des sorties et des entrées, respectivement. L'équation (3.5) constitue la forme du théorème de transport que nous emploierons.

### 3.6.1 Calcul des débits

La propriété  $B$  dont nous avons discuté plus haut remplace n'importe quelle des grandeurs de masse, énergie et quantité de mouvement. Ces grandeurs sont toutes proportionnelles à la taille du système ou à la masse. Définissons  $b$

$$b = \frac{B}{m}$$

A titre d'exemple,  $e = \frac{E}{m}$  désigne l'énergie par kilogramme de matière.

Considérez la figure 3.10. Durant l'intervalle  $\Delta t$ , la masse  $\delta m$  traverse la surface  $A$ . Dans un premier temps, supposons que la vitesse de l'écoulement, la masse volumique ainsi que la propriété  $b$  sont constantes durant  $\Delta t$  et uniformes dans l'ensemble du volume représenté et en particulier sur la surface  $A$ .

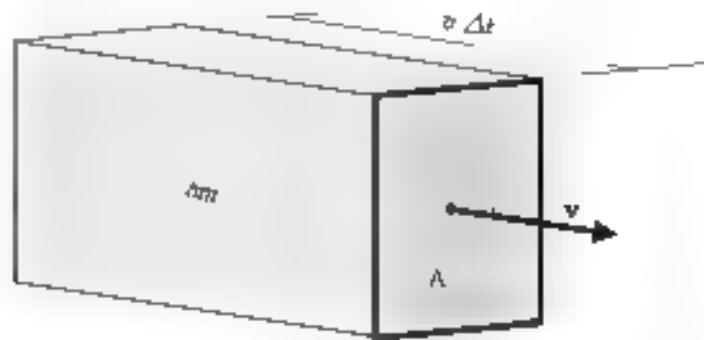


Figure 3.10 Paramètres d'intérêt pour le calcul de débit

Alors la quantité de  $B$  transportée par la masse en mouvement traversant  $A$  durant  $\Delta t$  est

$$\delta B = b \delta m = b \rho \delta V$$

Où  $\delta V$  correspond au volume occupé par  $\delta m$ . Puisque le prisme est de longueur  $v \Delta t$  il s'ensuit qu'on a

$$\delta B = b \rho v A \Delta t$$

$$B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta B}{\Delta t} = b \rho v A \quad (3-6)$$

Ce résultat est toutefois incomplet. Pour une part, il ne rend pas compte du fait que la surface  $A$  peut elle-même être en mouvement. Dans cette éventualité, la vitesse  $v$  dans l'expression (3-6) doit être remplacée par la vitesse *relative* de l'écoulement par rapport à la surface. En effet, par exemple, si la surface  $A$  se déplace à la vitesse de l'écoulement, elle ne sera traversée par aucune matière et les débits seront nuls. D'autre part, on observe que c'est la composante normale de la vitesse relative qui participe au transport de masse à travers la surface (voyez la figure 3-11).

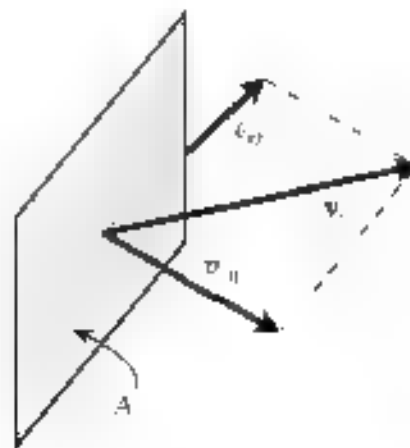


Figure 3.11 La composante tangentielle de la vitesse relative ( $v_t$ ) ne contribue pas au transport de masse à travers  $A$ .

L'équation (3-6) devient alors

$$\dot{B} = b\rho v_n A \quad (3-7)$$

où  $v_n$  : composante normale de la vitesse relative de l'écoulement.

La plupart des situations que nous rencontrerons seront telles que nous emploierons (3-7). Finalement, si la vitesse, la masse volumique et  $b$  ne sont pas uniformes sur la surface  $A$ , l'équation (3-7) devient (voyez l'annexe)

$$\dot{B} = \int_A b\rho v_n dA \quad (3-8)$$

### 3.7 ANNEXE Formule générale du calcul du débit de B

Nous nous proposons ici d'établir la formule générale pour le calcul du débit de B

Considérez la figure 3.12. Le volume de contrôle est délimité par le trait pointillé. Comme c'est l'usage, on définit le vecteur élément de surface  $d\mathbf{A}$  comme un vecteur normal à la surface localement et de taille infinitésimale  $dA$ . Puisque l'opération de sommation s'effectuera sur une surface fermée, la convention veut que  $d\mathbf{A}$  pointe vers « l'extérieur ». On a aussi représenté les vecteurs vitesse relative et surface en deux points de la surface  $A$ .

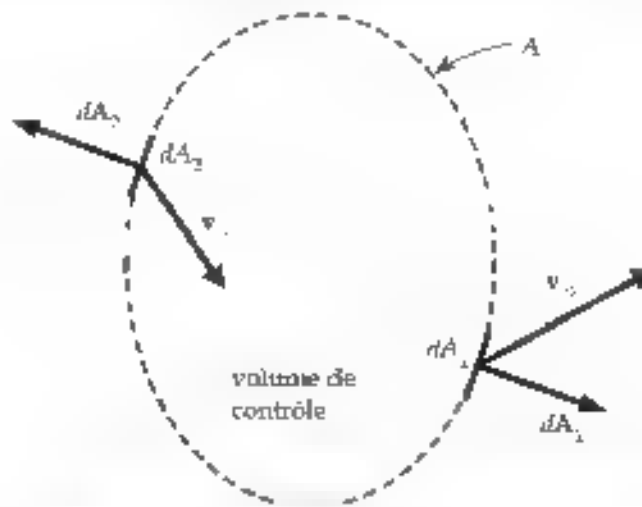


Figure 3.12 Débits en deux points de la surface délimitant le volume de contrôle

Se référant au résultat (3.7) et si on considère qu'un débit positif correspond à une « sortie » de masse (et de la propriété  $B$  associée), on établit que le débit infinitésimal  $d\dot{B}$  à travers la surface infinitésimale  $dA$  peut s'écrire

$$d\dot{B} = b\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = b\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

On observe ainsi que les produits scalaires effectués en  $d\mathbf{A}$  et  $d\mathbf{A}$  donneront lieu à des résultats de signes opposés, en accord avec la convention énoncée précédemment. Alors, le débit net de  $B$  à travers les frontières du volume de contrôle devient

$$\dot{B}_{\text{net}} = \oint_V b\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (3.9)$$

Et le théorème du transport peut s'écrire

$$\frac{dB_{\text{sys}}}{dt} = \frac{dB_{\text{cv}}}{dt} + \oint_V b\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (3.10)$$



## CHAPITRE 4

# LES ÉQUATION DE CONTINUITÉ ET DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

### Table des matières

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>4.2</b>	<b>Équation de continuité (conservation de la masse)</b>	<b>3</b>
4.2.1	Débit massique	4
4.2.2	Écoulement stationnaire	4
4.2.3	Écoulements incompressibles	4
4.2.4	Vitesse moyenne	6
<b>4.3</b>	<b>Équation de la quantité de mouvement</b>	<b>7</b>
4.3.1	Forces agissant sur un système en écoulement	11
4.3.2	Facteur de correction $\beta$	14
<b>4.4</b>	<b>Remarques portant sur l'intégrale <math>\int v \, dA</math></b>	<b>15</b>
<b>4.5</b>	<b>EXERCICES</b>	<b>17</b>



## 4.1 Introduction

Au chapitre 3, nous nous sommes dotés d'un outil mathématique, le théorème du transport dont l'objet est de relier les conditions qui prévalent au sein d'un volume de contrôle à l'application des lois physiques à un système.

Le paramètre  $B$  qui apparaît dans l'expression du théorème du transport désigne, on s'en souvient, toute grandeur physique extensive (proportionnelle à la masse). De façon concrète, les grandeurs physiques qui nous intéresseront seront respectivement la masse, la quantité de mouvement et l'énergie. Nous serons donc amenés à écrire trois équations fondamentales régissant le comportement des fluides en écoulement : l'équation de continuité, l'équation de quantité de mouvement et l'équation d'énergie. Au chapitre 4, nous établirons les deux premières alors que l'équation d'énergie sera considérée au chapitre 5.

## 4.2 Équation de continuité (conservation de la masse)

Le paramètre  $B$  est identifié à la masse. On aura alors

$$B = m$$

et 
$$b = \frac{B}{m} = 1$$

Le théorème du transport devient alors

$$\frac{dm_{\text{VC}}}{dt} = \frac{dm_{\text{VS}}}{dt} + \sum_i \dot{m}_i - \sum_r \dot{m}_r$$

Or la masse d'un système est (par définition, conservée). Ainsi

$$\frac{dm_{\text{VS}}}{dt} = 0$$

et :

$$\boxed{\frac{dm_{\text{VC}}}{dt} = \sum_i \dot{m}_i - \sum_r \dot{m}_r} \quad (4.1)$$

C'est l'équation de continuité. Elle stipule que le taux de variation de la masse contenue dans le volume de contrôle est donné par la différence entre les débits massiques d'entrée et de sortie.

### 4.2.1 Débit massique

En utilisant l'équation (3-8), on obtient pour le débit massique

$$\dot{m} = \int_A \rho v_n dA \quad (4-2)$$

Si l'écoulement peut être considéré uniforme sur la section de passage ( $\rho = \text{cte}$  et  $\mathbf{v} = \text{cte}$  sur  $A$ ), alors l'expression (4-2) prend la forme simplifiée

$$\dot{m} = \rho v_n A \quad (4-3)$$

### 4.2.2 Écoulement stationnaire

Le cas d'écoulement stationnaire est particulièrement intéressant puisqu'il se présente souvent en pratique. Dans ce cas, il n'y a pas d'accumulation de masse à l'intérieur du volume de contrôle, c'est-à-dire

$$\frac{dm_{VC}}{dt} = 0$$

L'équation de continuité devient donc

$$\sum_i \dot{m}_i = \sum_e \dot{m}_e \quad (4-4)$$

### 4.2.3 Écoulements incompressibles

Si l'écoulement est incompressible (dans le cas de l'écoulement d'un liquide par exemple), l'équation de continuité peut s'exprimer de façon un peu différente. Puisque  $\rho = \text{cte}$

$$m_{VC} = \rho V_{VC} \quad \text{et} \quad \frac{d(\rho V_{VC})}{dt} = \rho \frac{dV_{VC}}{dt}$$

de plus

$$\dot{m} = \int_S \rho v_n dA = \rho \int_S v_n dA$$



Définissons le débit volumique  $Q$  (en  $m^3/s$ ).

$$Q = \int_A \underline{v}_m dA$$

Alors

$$\underline{m} = \rho Q$$

Réécrivons l'équation de continuité

$$\frac{d}{dt} \rho \underline{V}_{cc} = \sum_i \rho Q - \sum_j \rho Q$$

$$\rho \frac{d \underline{V}_{cc}}{dt} = \rho \sum_i Q - \rho \sum_j Q$$

$$\frac{d \underline{V}_{cc}}{dt} = \sum_i Q - \sum_j Q \quad (4-5)$$

De plus, si l'écoulement est stationnaire,  $\frac{d \underline{V}_{cc}}{dt} = 0$  et

$$\sum_i Q = \sum_j Q \quad (4-6)$$

Les équations (4-5) et (4-6) sont partiellement équivalentes aux équations (4-1) et (4-4) respectivement dans les cas d'écoulements incompressibles.

**Exemple 4.1** De l'eau s'écoule à travers une conduite circulaire convergente (figure 4.1). Si l'écoulement est stationnaire et peut être considéré uniforme sur les sections de passage, calculez la vitesse de sortie  $v_2$ .

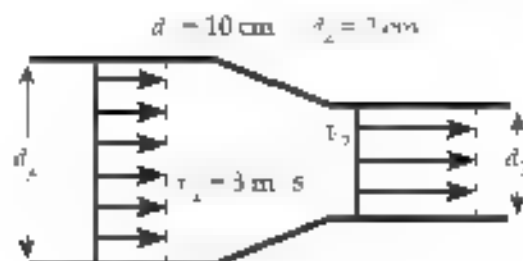


Figure 4.1 Exemple 4.1

*Solution*

En vertu de l'équation (4-6), on peut écrire

$$Q = Q_1 \\ A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} \quad A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4}$$

Donc

$$v = v_2 \left( \frac{d_1^2}{d^2} \right) = 75 \text{ m/s}$$

**4.2.4 Vitesse moyenne**

On définit la vitesse moyenne  $\bar{v}$

$$\bar{v} = \frac{\int_A v \, dA}{A} \quad (4-7)$$

Or

$$Q = \int_A v \, dA$$

Il s'ensuit que :

$$Q = \bar{v} A \quad (4-8)$$

**Exemple 4.2** Un fluide en écoulement à travers une conduite de rayon  $R$  présente le profil de

vitesse  $v(r) = v_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$ . Déterminez ce que représente  $v_0$  et calculez le débit volumique et la vitesse moyenne si  $v_0 = 0,5 \text{ m/s}$ ,  $R = 0,2 \text{ m}$  et  $n = 1,5$ .

*Solution*

i) On remarque que  $v(0) = v_0$ .  $v_0$  désigne donc la vitesse au centre de la conduite

ii)

$$Q = \int_A v \, dA = \int_0^R v_0 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] (2\pi r \, dr)$$

$$Q = 2\pi r_0 \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+2} R^n \right]_0^R$$

$$\Rightarrow Q = \left[ \frac{m_0}{n+2} \right] (\pi R^2) = \bar{v} A$$

$$\bar{v} = v_0 \left[ \frac{n}{n+2} \right]$$

Insérant les valeurs numériques, il vient

$$Q = 0,027 \text{ m}^3/\text{s} \quad , \quad \bar{v} = 0,214 \text{ m/s}$$

### 4.3 Équation de la quantité de mouvement

Un fluide en écoulement exerce des forces sur tout objet qui dévie l'écoulement (un coude dans une conduite, un bec de sortie, une aube...). L'utilisation de l'équation de la quantité de mouvement permet de calculer ces forces. On doit touterfois d'abord établir les forces s'exerçant sur la masse fluide. La deuxième loi de Newton dans sa forme générale s'écrit

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d(m\mathbf{v})_{\text{VC}}}{dt}$$

où  $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$  désigne la force résultante agissant sur le système et le produit  $m\mathbf{v}$  constitue sa quantité de mouvement.

Si le système considéré est une masse fluide en écoulement, alors l'utilisation du théorème du transport s'impose. En identifiant

$$B \rightarrow m\mathbf{v} \\ \text{et} \quad b = \frac{B}{m} = \mathbf{v}$$

Alors

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d(m\mathbf{v})_{\text{VC}}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v})_{\text{VC}} + \sum_i \dot{m}_i \mathbf{v}_i - \sum_e (\dot{m}_e \mathbf{v}_e) \quad (4-9)$$

La grandeur  $\dot{m}v$  (débit de quantité de mouvement) se calcule à l'aide de l'équation (4.8).

$$\dot{m}v = \int_A \rho v v_n dA \quad (4.10)$$

Ce calcul peut en général être assez laborieux. Nous ne considérerons donc que les cas pour lesquels la vitesse d'écoulement  $v$  est uniforme sur les sections de passage. Puisque  $v = v\mathbf{e}_n$  sur  $A$ ,

$$\dot{m}v = v \int_A \rho v_n dA = \dot{m}v$$

Ainsi, dans ce cas particulier le débit de quantité de mouvement est simplement donné par le produit du débit massique et de la vitesse. Sous ces conditions, l'équation de quantité de mouvement s'écrit

$$\sum \mathbf{F}_m = \frac{d}{dt} \dot{m}v + \sum_A \dot{m}v - \sum_i \dot{m}v_i \quad (4.11)$$

A ce stade, quatre remarques s'imposent.

- La force résultante dont il est question aux équations (4.9) et (4.11) est la force résultante agissant sur le fluide contenu dans le volume de contrôle.
- Les équations (4.9) et (4.11) sont des équations vectorielles. De ce fait, l'équation (4.11), par exemple, représente trois équations scalaires, une pour chaque direction de l'espace. Ainsi, pour la composante en  $x$

$$\sum F_{x,m} = \frac{d}{dt} \dot{m}v_x + \sum_A \dot{m}v_x - \sum_i \dot{m}v_{x,i}$$

- Deux vitesses interviennent dans le calcul spécifié par (4.11) et elles ne réfèrent pas, en général, à la même grandeur physique. La vitesse d'écoulement,  $v$ , est une quantité vectorielle et, de plus, elle est mesurée par rapport à un référentiel (inertiel, se déplaçant à vitesse constante). Quant à  $v_n$ , qui est utilisée dans le calcul du débit massique, rappelons qu'elle ne correspond qu'à la composante normale de la vitesse relative du fluide. Elle est donc mesurée par rapport à la surface de passage (qui peut être accélérée, entre autres).

**Exemple 4.3:** Soit une plaque de  $0,01 \text{ m}$  se déplaçant en direction des  $x$  positifs à  $4 \text{ m/s}$ . De l'eau s'écoulant dans la même direction à  $10 \text{ m/s}$  frappe la plaque. Calculez  $\dot{m}v$

*Solution*

$$v_m = 6 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = \rho v_m A = (1000)(6)(0,01) = 60 \text{ kg/s}$$

$v$  mesurée par rapport au sol

$$v = 10 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \dot{m}v = 600 \text{ N}$$

d) La quantité  $\frac{d(mv)_{VC}}{dt}$  représente le taux de variation de la quantité de mouvement du volume de contrôle. On remarque que

$$\frac{d(mv)_{VC}}{dt} = v_{VC} \frac{dm_{VC}}{dt} + m_{VC} \frac{dv_{VC}}{dt}$$

Ainsi, ce terme sera non-nul si l'une ou l'autre de deux conditions est satisfaite:

1) l'écoulement est non-stationnaire  $\left( \frac{dm_{VC}}{dt} \neq 0 \right)$

2) le centre de masse du volume de contrôle est accéléré.

Remarquons qu'un volume de contrôle en rotation (même à vitesse angulaire constante) est accéléré, de sorte que  $\frac{dv_{VC}}{dt} \neq 0$

Les considérations qui précèdent vont souvent conditionner le choix de volume de contrôle

**Exemple 4.4:** Une plaque déviatrice se déplace à la vitesse constante  $U$  vers la droite. Un jet de vitesse  $v$  est dévié sans frottement par la plaque. Si on s'intéresse à la force exercée par le jet sur la plaque déviatrice, quel serait un choix judicieux de volume de contrôle?

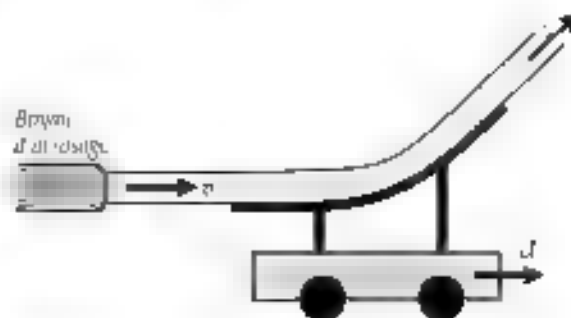


Figure 4.2 Exemple 4.4

*Solution*

Deux choix (entre autres) sont envisageables pour le volume de contrôle. Ils sont illustrés aux figures 4.3 a) et 4.3 b)

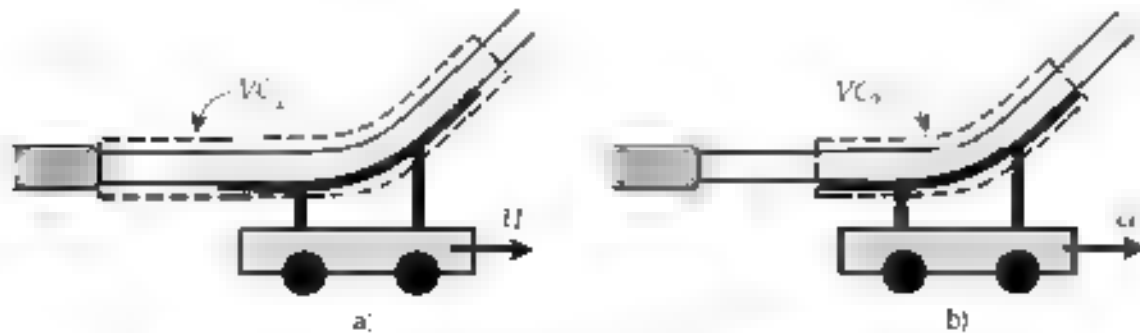


Figure 4.3 Choix possibles pour le volume de contrôle de l'exemple 4.1

Le  $VC_1$  est un volume de contrôle tout à fait acceptable. Toutefois, comme il s'agrandit dans le temps, la masse qu'il contient va en augmentant c'est-à-dire  $\frac{dm}{dt} \neq 0$ . On doit donc conserver le terme  $\frac{d(mv)_{VC}}{dt}$  dans l'équation.

Le  $VC_2$ , quant à lui, est confiné aux dimensions de la plaque déviatrice. Comme il n'y a pas d'accumulation de masse (d'eau) sur la plaque, on aura  $\frac{dm}{dt} = 0$ . Puisque d'autre part il se déplace (par hypothèse) à vitesse constante,  $\frac{dv_{VC}}{dt} = 0$ . On peut alors se affranchir du terme  $\frac{d(mv)_{VC}}{dt}$  dans l'équation. C'est donc  $VC_2$  qui sera retenu comme volume de contrôle puisqu'il conduit à un calcul plus simple.

### 4.3.1 Forces agissant sur un système en écoulement

Considérons un fluide en écoulement à travers un coude.

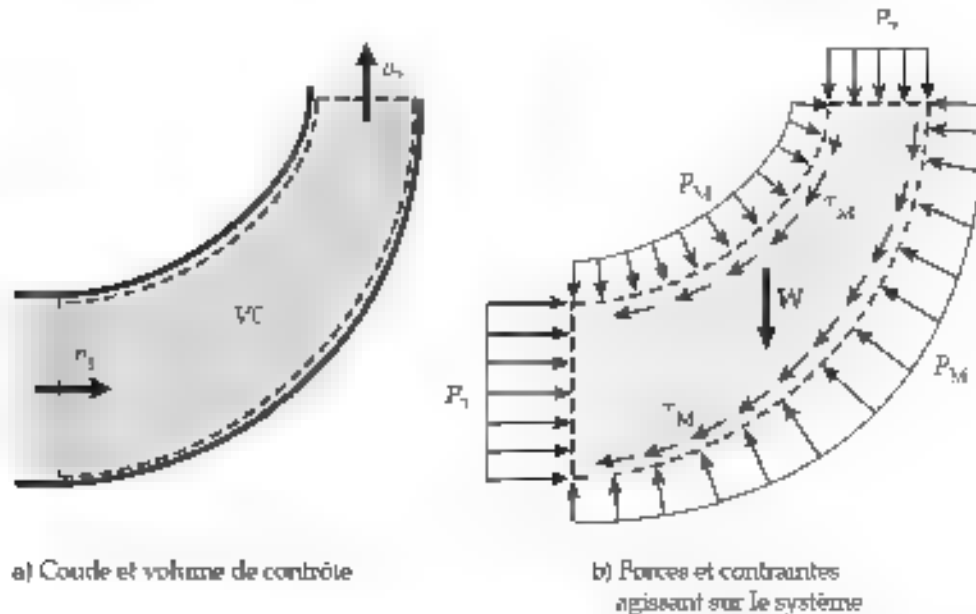


Figure 4.4 Les forces agissant sur un système en écoulement

Le système est constitué de la masse à l'intérieur du volume de contrôle (figure 4.4 a). Les forces et contraintes agissant sur le système apparaissent à la figure 4.4 b). La force résultante sera alors donnée par la somme des forces de poids, de cisaillement et de pression. Ce calcul est plutôt laborieux, en général. La paroi exerce une pression  $P_M$  et du cisaillement  $\tau_m$  sur les pourtour du système. On choisit de regrouper l'ensemble de ces forces et on désigne cette force résultante par  $F_M$ . On regroupe aussi l'ensemble des forces dues à la pression aux entrées et sorties  $F_p$ . Si le poids est représenté par  $W$  alors la force résultante peut s'écrire

$$\sum F_{\text{ext}} = F_M + F_p + W \quad (4-12)$$

#### Notes sur le calcul de $F_p$ et $F_M$

Dans le calcul de  $F_p$  et  $F_M$  intervient en général la pression absolue. Mais l'ensemble du système et de la conduite est souvent plongé dans un fluide de pression uniforme  $P_{\text{ext}}$ . Évidemment dans ce cas, la force résultante due à  $P_{\text{ext}}$  s'exerçant sur le système s'annule. Il est donc approprié dans ce cas de désigner  $F_p$  et  $F_M$  comme les forces nettes (faisant abstraction de l'action de  $P_{\text{ext}}$ ) dues à la pression aux entrées et sorties et à la paroi agissant sur le système. On utilisera donc lors de leur calcul la pression relative plutôt que la pression absolue.

Souvent on s'intéresse à la force  $\mathbf{R}$  exercée par le fluide sur la paroi. De la troisième loi de Newton on a

$$\mathbf{R} = -\mathbf{F}_M \quad (4.13)$$

En résumé :

$W$  : poids du système

$F_p$  : force nette due à la pression aux entrées et sorties

$F_M$  : force nette exercée par la paroi sur le système

$\mathbf{R}$  : force nette exercée par le système (fluide) sur la paroi

**Exemple 4.5** La boîte de la figure 4.5 comporte 2 entrées et une sortie. Calculez la force que l'eau en écoulement exerce sur celle-ci (négligez le poids).

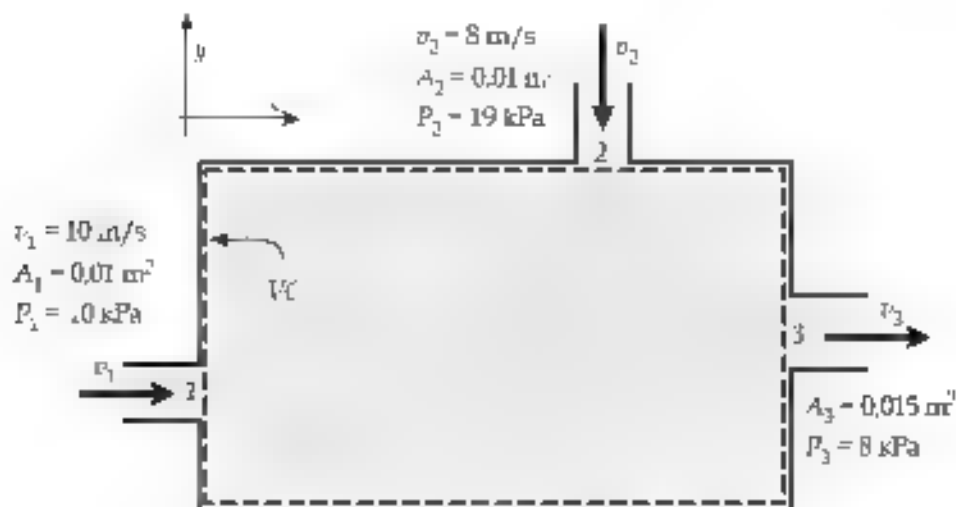


Figure 4.5 Figure de l'exemple 4.5

*Solution*

a) Calcul de  $v_3$

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$v_3 = \frac{v_1 A_1 + v_2 A_2}{A_3} = 12 \text{ m/s}$$



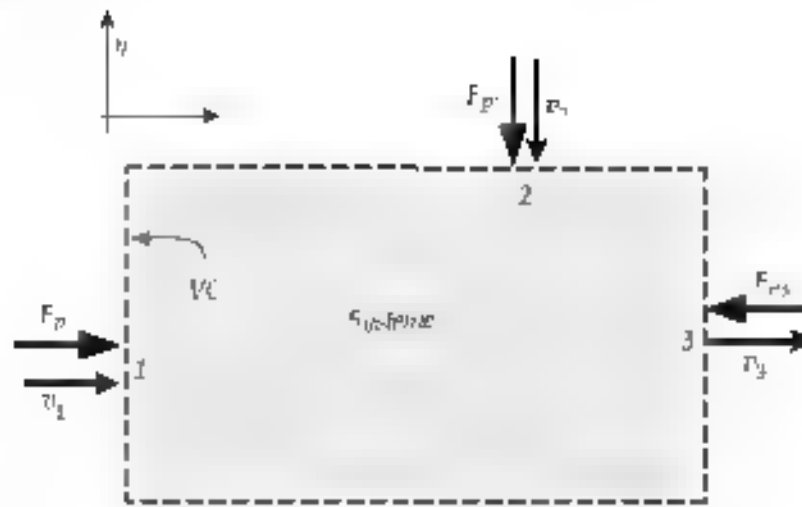
a) Calcul de  $\mathbf{R}$ 

Figure 4.6 Forces et vitesses pour l'exemple 4-5

$$\mathbf{v}_1 = 10\mathbf{i} \text{ m/s}$$

$$\dot{m}_1 = \rho Q_1 = 100 \text{ kg/s}$$

$$\mathbf{v}_r = -8\mathbf{j} \text{ m/s}$$

$$\dot{m}_r = \rho Q_2 = 80 \text{ kg/s}$$

$$\mathbf{v}_3 = 12\mathbf{i} \text{ m/s}$$

$$\dot{m}_3 = \rho Q_3 = 180 \text{ kg/s}$$

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}_{ext} &= \sum_i \dot{m}_i \mathbf{V} - \sum_j \dot{m}_j \mathbf{V} \\ &= (\dot{m}_3 \mathbf{v}_3) - (\dot{m}_1 \mathbf{v}_1 + \dot{m}_r \mathbf{v}_r) \\ &= (180)(12\mathbf{i}) - (100)(10\mathbf{i}) - (80)(-8\mathbf{j}) \text{ N} \\ &= (1160\mathbf{i} + 640\mathbf{j}) \text{ N} \end{aligned}$$

De plus

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{F}_p + \mathbf{R}$$

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{p1} + \mathbf{F}_{p2} + \mathbf{F}_{p3}$$

$$\mathbf{F}_{p1} = P_1 A_1 \mathbf{i} = 100\mathbf{i} \text{ N}, \quad \mathbf{F}_{p2} = P_2 A_2 \mathbf{j} = 190\mathbf{j} \text{ N}, \quad \mathbf{F}_{p3} = P_3 A_3 \mathbf{i} = 120\mathbf{i} \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_p = (20\mathbf{i} + 190\mathbf{j}) \text{ N}$$

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_p = (1180\mathbf{i} + 830\mathbf{j}) \text{ N}$$

**Remarque**

On observe dans le cas de l'exemple qui précède, que puisque

$$\sum F_{xy} = \sum m \mathbf{v} - \sum \rho \mathbf{v}$$

et que les vitesses ne présentent que des composantes dans le plan horizontal (rappelons que la coordonnée  $z$  est associée à la direction verticale), il s'ensuit que  $\sum F_{xy}$  ne présente elle-même que des composantes dans le plan horizontal. Ce qui précède s'applique aussi à  $F_p$ . Puisque, par ailleurs,

$$\mathbf{R} = \sum F_{xy} + F_p + \mathbf{W}$$

il vient

$$R_z = W$$

Si on s'intéresse uniquement à la contribution à  $\mathbf{R}$  qui est due à l'écoulement (contribution dynamique), on constate qu'il est inutile de considérer le poids dans les calculs. Nous conviendrons donc pour la suite que si la déviation de l'écoulement s'effectue dans le plan horizontal, l'effet du poids sera négligé.

**4.3.2 Facteur de correction  $\beta$** 

Dans bien des situations pratiques la vitesse à une sortie ou une entrée est orientée selon l'axe de celle-ci mais ne peut être considérée uniforme sur la section de passage. On doit donc en général utiliser l'équation (4-10) pour calculer le débit de quantité de mouvement. Pour simplifier le traitement, on peut choisir de réécrire l'équation (4-10) de la façon suivante

$$\rho \int_A \mathbf{v} v_m dA = \rho v_m \bar{v} \quad (4-14)$$

où  $\bar{v}$  est la vitesse moyenne et  $\beta$  un facteur de correction défini par

$$\beta = \frac{\int_A v^2 dA}{\bar{v}^2 A} \quad (4-15)$$

Les équations (4-9) et (4-11) deviendront alors

$$\sum F_{xy} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \sum_i m_i \mathbf{v}_i - \sum_e \rho_e \beta_e \mathbf{v}_e \quad (4-16)$$

#### 4.4 Remarques portant sur l'intégrale $\int v \, dA$

En général, l'évaluation de cette intégrale requiert que l'on emploie les méthodes couvertes dans le cadre d'un cours de calcul à plusieurs variables. Toutefois, les exemples et exercices du texte sont tous d'un de deux types : l'écoulement s'effectue entre deux très grandes surfaces planes ou à travers une conduite circulaire.

##### 1) Plaques parallèles

Si l'écoulement s'effectue entre deux plaques de grandes dimensions alors que l'espacement  $h$  entre celles-ci est petit, on peut assimiler la situation à un écoulement entre deux surfaces planes infinies (négligeant les effets de bord). La vitesse ne devient alors fonction que de la coordonnée  $y$  (Figure 4.7).

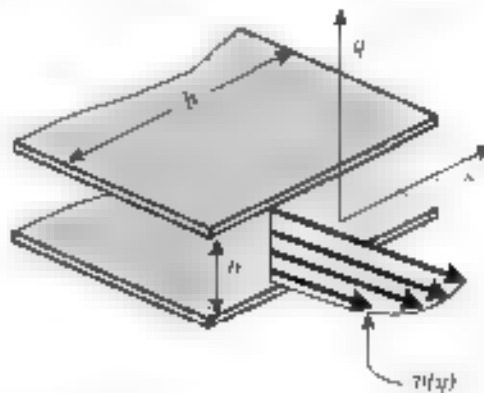


Figure 4.7 Écoulement entre deux plaques de grandes dimensions

L'intégrale qui a priori s'écrit

$$\int_A v \, dA = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} v(x, y) \, dx \, dy$$

prends la forme plus simple :

$$= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} v(y) \, dy = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} b \, v(y) \, dy$$

Or la quantité  $dA = b \, dy$  correspond à la surface infinitésimale du rectangle de largeur  $b$  et de hauteur  $dy$  (Figure 4.8).

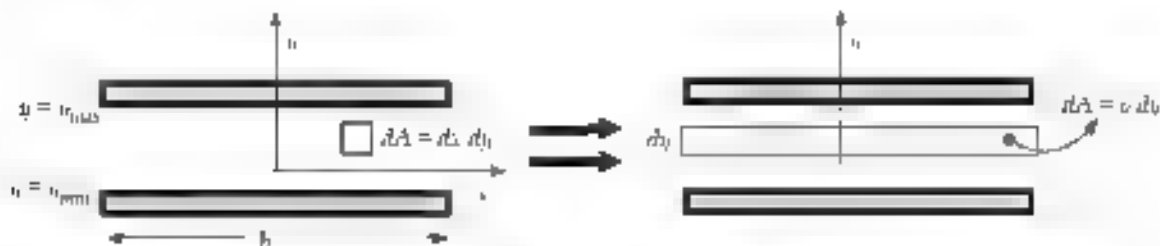


Figure 4.8 Simplification de l'intégrale à deux variables en une intégrale à une variable

On observe que l'intégrale à deux variables se transforme en une intégrale selon une dimension seulement : la coordonnée  $y$ . On écrira donc

$$\int_A v \, dA = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} v(y) \, dA \quad \text{avec } dA = b \, dy$$

#### (ii) Conduite circulaire

Nous avons déjà décrit comment la symétrie de la conduite imposeait un profil de vitesse ne dépendant que de la distance radiale  $r$  (voyez la discussion accompagnant la Figure 1.9 de la section 1.2.3). Ainsi,  $v = v(r)$ .

L'intégrale qui a priori s'écrit 
$$\int_A v \, dA = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} v(r, \theta) \, r \, dr \, d\theta$$

prend donc la forme plus simple

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\min}^{\max} v(r) \, r \, dr = \int_{\min}^{\max} 2\pi r \, v(r) \, dr$$

Or la quantité  $dA = 2\pi r \, dr$  correspond à la surface infinitésimale de la bande circulaire de rayon  $r$  et de largeur  $dr$  (figure 4.9)

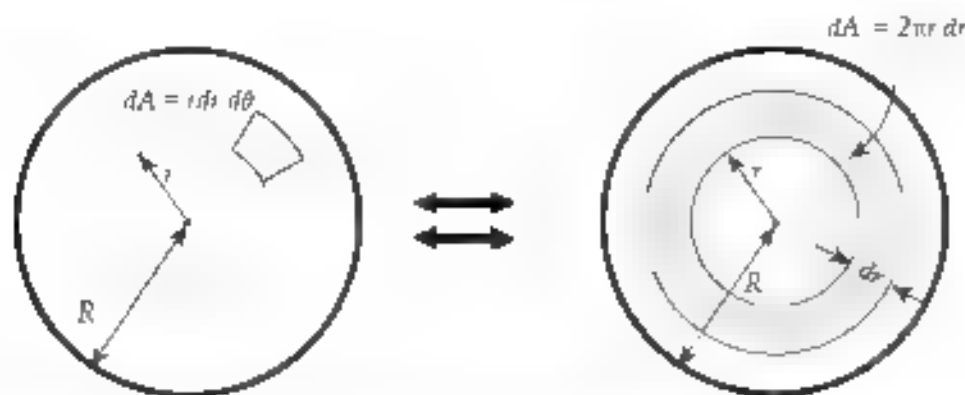


Figure 4.9 Simplification de l'intégrale à deux variables en une intégrale à une variable, symétrie radiale

On écrira donc

$$\int_A v \, dA = \int_{\min}^{\max} v(r) \, dA' \quad \text{avec } dA = 2\pi r \, dr$$

## 4.5 EXERCICES

**Problème 1** De l'eau de pluie s'écoule sur une rue inclinée décrivant ainsi un écoulement en régime permanent (figure P 4-1). Une feuille de papier à la surface se déplace à la vitesse de 0.5 m/s. La section de passage de l'écoulement a une largeur de 2 m et une hauteur  $h = 1$  cm. Calculez le débit volumique de l'écoulement pour les profils de vitesse suivants (la variable  $y$  exprime l'éloignement par rapport à la surface solide)

$$\text{a) } v(y) = U; \quad \text{b) } v(y) = U \left( \frac{y}{h} \right); \quad \text{c) } v(y) = U \left( 2 \frac{y}{h} - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right)$$

où  $y$  est la coordonnée perpendiculaire aux lignes de courant

$$\text{Rép. a) } Q = 0,01 \text{ m}^3/\text{s}; \quad \text{b) } Q = 0,005 \text{ m}^3/\text{s}; \quad \text{c) } Q = 0,0067 \text{ m}^3/\text{s};$$

**Problème 2** De l'air de masse volumique  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$  est aspiré à 6 m/s vers un compresseur à travers une conduite de 20 cm de diamètre. L'air quitte le compresseur à la vitesse de 3 m/s à travers une conduite de 10 cm de diamètre. Calculez la masse volumique de l'air à la sortie

$$\text{Rép. } \rho = 9,6 \text{ kg/m}^3$$

**Problème 3** De l'eau s'écoule à une vitesse uniforme de 3 m/s dans une conduite AB de 1,2 m de diamètre reliée à une conduite BC de 1,0 m de diamètre. Au point C la conduite se sépare en deux parties. La première, CD a un diamètre de 0,8 m et transporte le tiers de l'écoulement total. La vitesse dans la seconde CE est 2,5 m/s (voyez la figure P 4-3). Calculez

- le débit volumique dans la section AB
- la vitesse dans la section BC
- la vitesse dans la section CD
- le diamètre de la section CE

$$\text{Rép. a) } Q_{AB} = 3,393 \text{ m}^3/\text{s}; \quad \text{b) } v_{BC} = 1,92 \text{ m/s}; \quad \text{c) } v_{CD} = 2,25 \text{ m/s}; \quad \text{d) } d_{CE} = 1,073 \text{ m}$$

**Problème 4** Lors d'un essai d'écoulement dans une conduite cylindrique de 2 m de diamètre, on a constaté que la vitesse de l'écoulement était nulle à la paroi et égale à 6 m/s à l'axe central pour un débit volumique de  $10 \text{ m}^3/\text{s}$ . Le profil de vitesse obéit à la relation

$$v(r) = C \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^n \right)$$

où  $r$  désigne la position radiale et  $R$  le rayon de la conduite. Déterminez la valeur numérique et les unités des constantes  $C$  et  $n$ .

Rép.  $C_1 = 6 \text{ m/s}; \quad n = 2,26$

**Problème 5** Un profil de vitesse usuel pour les écoulements turbulents est donné par l'expression suivante

$$v(r) = v_{\max} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{2n} \right)$$

où  $v_{\max}$  est la vitesse maximale et  $R$  le rayon de la conduite. Calculez le rapport entre  $\bar{v}$ , la vitesse moyenne, et  $v_{\max}$  en fonction de  $n$ .

Rép.  $\frac{\bar{v}}{v_{\max}} = \frac{2n}{(1+n)(2n+1)}$

**Problème 6** Un réservoir se alimente en eau par deux entrées 1 et 2 (figure P 4.6). Le diamètre et la vitesse de l'écoulement à l'entrée 1 sont respectivement 10 cm et 5 m/s et le débit volumique en 2 est  $Q_2 = 0,03 \text{ m}^3/\text{s}$ .

a) Quelle est la vitesse  $v_3$  à la sortie si le diamètre  $d_3 = 15 \text{ cm}$  et si la hauteur d'eau  $h$  dans le réservoir se maintient constante?

b) Si à  $t = 0$  la vitesse de l'écoulement  $v_3$  à la sortie est augmentée à 5 m/s, à quelle vitesse le niveau du réservoir va-t-il baisser? Quelle masse d'eau le réservoir aura-t-il perdue au bout de 5 secondes si le diamètre du réservoir est de 60 cm?

Rép. a)  $v_3 = 3,92 \text{ m/s}$

b)  $v_{\text{niveau}} = -0,0676 \text{ m/s}; \quad m = 95,5 \text{ kg}$

**Problème 7** Une conduite circulaire de diamètre  $d_A$  amène de l'eau à un dispositif constitué de deux disques espacés de  $h$  et de rayons  $R$  qui produisent un écoulement de sortie s effectuant de façon radiale (figure P 4.7). Si la vitesse moyenne de l'eau dans la conduite est  $\bar{v}_A$ , établissez la vitesse moyenne  $\bar{v}_s$  (vitesse radiale)

a) à la distance  $r$  en fonction des paramètres mentionnés;

b) à  $r = 150 \text{ mm}$  et à la sortie des disques sachant que  $d_A = 70 \text{ mm}$ ,  $h = 10 \text{ mm}$ ,  $R = 300 \text{ mm}$  et  $\bar{v}_A = 10 \text{ m/s}$

$$\text{Rép. a) } \bar{v}_s(r) = \frac{\bar{v}_A d_A}{8hr}$$

$$\text{b) } \bar{v}_s(r = 150 \text{ mm}) = 2.083 \text{ m/s} ; \quad \bar{v}_s(r = 300 \text{ mm}) = 1.042 \text{ m/s}$$

**Problème 8** Une entrée d'eau de débit  $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$  et une entrée d'alcool ( $\sigma = 0,8$ ) de débit  $0,3 \text{ m}^3/\text{s}$  sont mélangées dans une conduite en Y. Quelle est la masse volumique du mélange à la sortie si les fluides sont considérés idéaux ?

$$\text{Rep. } \rho = 850 \text{ kg/m}^3$$

**Problème 9** De l'huile s'écoule à travers une conduite circulaire en régime laminaire suivant le profil de vitesse

$$v(r) = (0,6 - 15r^2) \text{ m/s}$$

Calculez a) le débit volumique

b) la vitesse moyenne

c) le facteur de correction sur la vitesse

$$\text{Rép. a) } Q = 0,0377 \text{ m}^3/\text{s} ; \quad \text{b) } \bar{v} = 0,3 \text{ m/s} , \quad \text{c) } \beta = 4/3$$

**Note :** Pour les exercices qui suivent, les écoulements sont considérés uniformes sur les sections de passage.

**Problème 10** Un jet d'eau sort d'un bex de sortie à la vitesse de 30 m/s. Si la pression dans la conduite est de 500 kPa (figure P 4.10). Calculez

- a) le débit volumique
- b) la réaction du jet sur le bex de sortie

$$\text{Rép. : a) } Q = 0,0147 \text{ m}^3/\text{s} ; \quad \text{b) } R = 24,11 \text{ kN}$$

**Problème 11** Une plaque est soumise à l'impact direct d'un jet d'eau de 50 mm de diamètre s'écoulant à la vitesse de 18 m/s (figure P 4.11). La plaque dévie le jet de façon radiale; toutes les vitesses de sortie sont presunées de même grandeur. Calculez la force exercée sur la plaque

- a) si elle est au repos,
- b) si elle se déplace dans le sens du jet à la vitesse de 6 m/s.

$$\text{Rep. : a) } R = 636,21 \text{ N}, \quad \text{b) } R = 282,71 \text{ N}$$

**Problème 12** Un coude horizontal fait dévier un écoulement d'eau de  $180^\circ$  (figure P 4.12). La pression et la vitesse à l'entrée sont, respectivement, de 100 kPa et 2 m/s alors qu'à la sortie, l'eau est à la pression atmosphérique. Déterminez la force nécessaire pour maintenir le coude en place.

$$\text{Rep. : } F = -8345i \text{ N}$$

**Problème 13** Un jet d'eau s'écoulant dans l'air est dévié par une surface courbe (figure P 4.13). Si le débit massique vaut 0,8 kg/s et qu'on néglige le poids, calculez la force du jet sur cette surface

$$\text{Rép. : } R = (141 \quad 17,3j) \text{ N}$$



**Problème 14** Un coude horizontal fait dévier un écoulement de  $45^\circ$  dans le plan horizontal (figure P 4.14). Les diamètres et les pressions sont respectivement de 500 mm et 40 kPa à l'entrée et de 250 mm et 23 kPa à la sortie. Calculez la force exercée par le coude ( $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$ ) sur la conduite pour un débit de  $0,45 \text{ m}^3/\text{s}$ .

$$\text{Rép. } \mathbf{R} = \{5453\mathbf{i} - 3278\mathbf{j}\} \text{ N}$$

**Problème 15** Un coude convergeant fait dévier un écoulement dans le plan vertical (figure P 4.15). Le volume occupé par l'eau entre les points 1 et 2 est de  $0,2 \text{ m}^3$ . Sachant que le débit est de  $0,4 \text{ m}^3/\text{s}$  et que les pressions à l'entrée et à la sortie sont de 140 kPa et 90 kPa, respectivement, calculez la force exercée par l'eau sur le coude.

$$\text{Rép. } \mathbf{R} = \{25\,72\mathbf{i} + 3\,636\mathbf{k}\} \text{ kN}$$

**Problème 16** Un raccord a une section d'admission de  $7 \text{ dm}^2$  et une section de retour de  $28 \text{ dm}^2$ . Le raccord disposé dans le plan horizontal fait dévier le liquide selon les directions illustrées à la figure P 4.16. Les pressions à l'entrée et à la sortie sont de 40 kPa et de 20 kPa, respectivement. Le fluide présente une masse volumique de  $900 \text{ kg/m}^3$  et le débit est de  $400 \text{ kg/s}$ . Calculez la force qu'exerce le fluide sur le raccord.

$$\text{Rép. } \mathbf{R} = \{1507\mathbf{i} - 8069\mathbf{j}\} \text{ N}$$

**Problème 17** Un fluide ( $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ ) circule à travers un T de 10 cm de diamètre qui débouche à l'atmosphère (figure P 4.17). Le débit de  $0,01 \text{ m}^3/\text{s}$  à l'entrée se divise également entre les sorties. Sachant que la pression d'entrée est de 100 kPa et si on néglige la gravité, calculez la force exercée par l'écoulement sur le T.

$$\text{Rép. } \mathbf{R} = 795,61 \text{ N}$$

**Problème 18** Dans une installation hydraulique, l'eau débouche à l'atmosphère à travers une conduite horizontale en Y (figure P 4.18). La vitesse des jets aux deux sorties est de  $10 \text{ m/s}$  et la pression à l'entrée est de  $19,4 \text{ kPa}$ .

- Calculez les trois débits
- Déterminez la force résultante exercée sur les parois de la conduite

Rép. a)  $Q_1 = 0,0888 \text{ m}^3/\text{s}$  ;  $Q_2 = 0,0503 \text{ m}^3/\text{s}$  ;  $Q_3 = 0,0385 \text{ m}^3/\text{s}$   
 b)  $\mathbf{R} = (288,8\mathbf{i} + 82,0\mathbf{j}) \text{ N}$

**Problème 19** Une plaque déviatrice se déplace à la vitesse constante de  $U$  vers la droite. Un jet de vitesse absolue  $v$  (par rapport au sol) et de section  $A$  est dévié sans frottement par la plaque. On présume que l'écoulement garde la même section après avoir été dévié. En fonction des paramètres de la figure P 4.19 et de la masse volumique, exprimez

- les composantes horizontale et verticale de la vitesse de sortie  $v_x$  par rapport au sol,
- les composantes horizontale et verticale de la force exercée par le jet sur la plaque.

Rép. a)  $v_{sx} = (v - U)\cos\beta + U$  ;  $v_{sy} = (v - U)\sin\beta$   
 b)  $R_x = \rho A (v - U)^2 (1 - \cos\beta)$  ;  $R_y = \rho A (v - U)^2 \sin\beta$

**Problème 20** Un fluide de densité  $0,85$  s'écoule en régime stationnaire comme il est illustré à la figure P 4.20. Toutes les entrées et sorties sont soumises à la pression atmosphérique. Calculez la force nécessaire pour maintenir la boîte en place.

Rép.  $\mathbf{F} = (4183\mathbf{i} + 5717\mathbf{j}) \text{ N}$

**Problème 21** La vitesse de l'écoulement à travers l'orifice circulaire de  $20 \text{ cm}$  de diamètre d'un grand réservoir est donnée par  $v = \sqrt{2gh}$ . Quelle force de frottement doit exercer le sol afin de maintenir le réservoir en place si  $h = 10 \text{ m}$  (figure P 4.21) ?

Rép.  $F = 6164 \text{ N}$

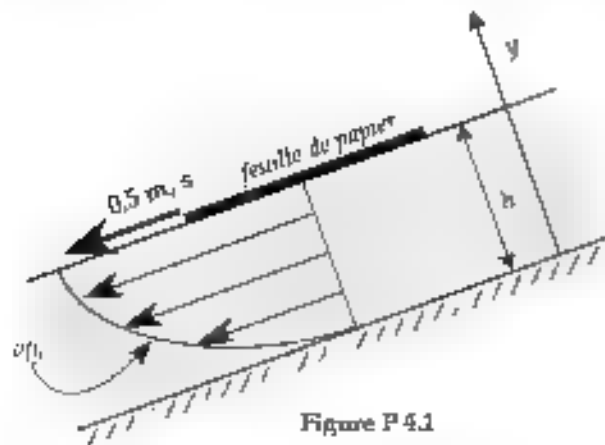


Figure P 4.1

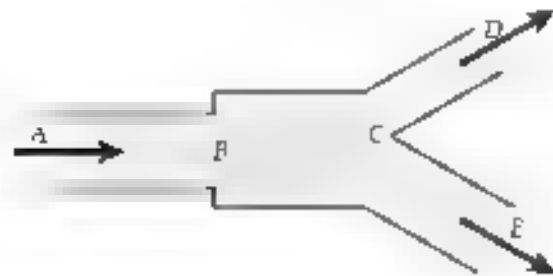


Figure P 4.3

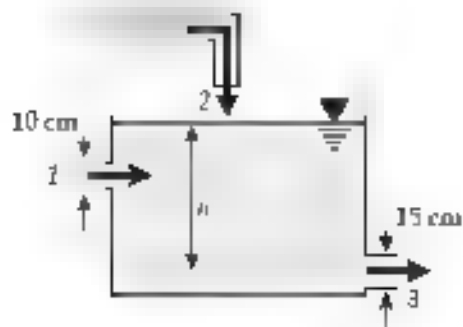


Figure P 4.6

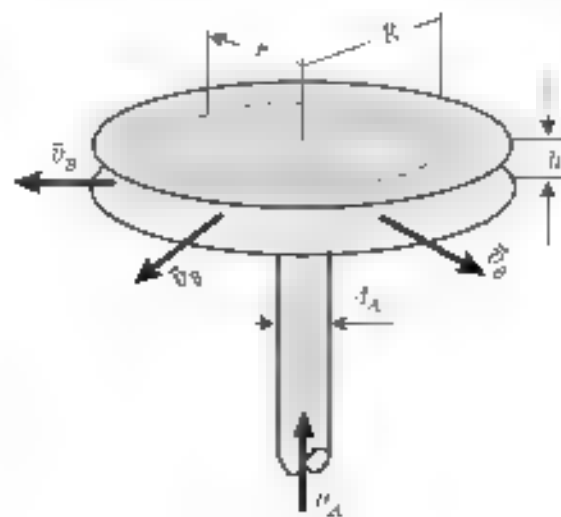


Figure P 4.7

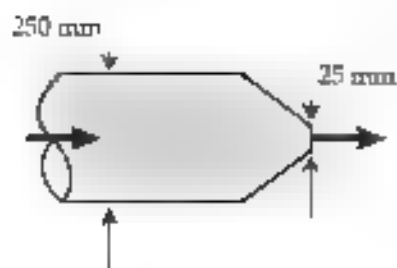


Figure P 4.10

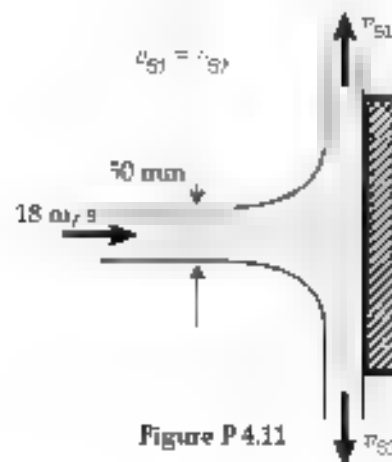


Figure P 4.11

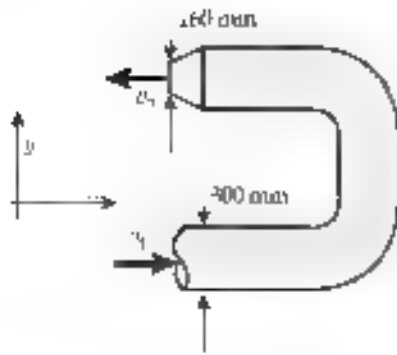


Figure P 4.12

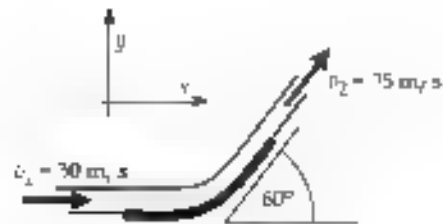


Figure P 4.13

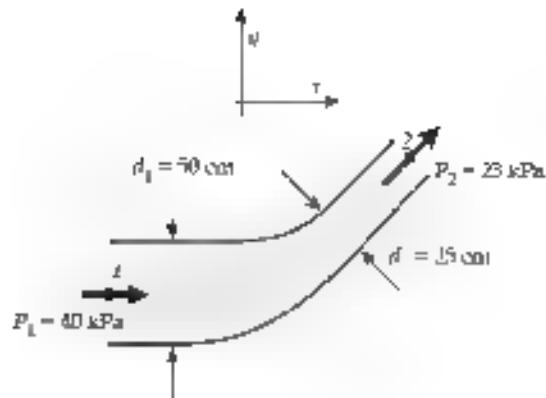


Figure P 4.14

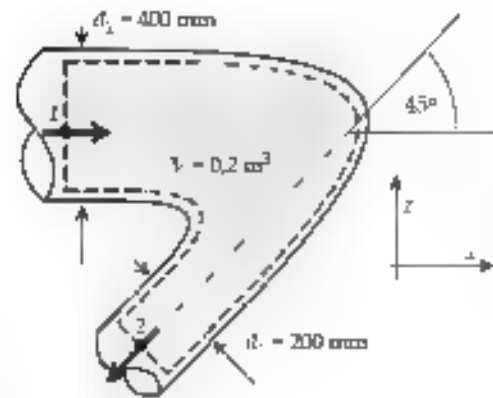


Figure P 4.15

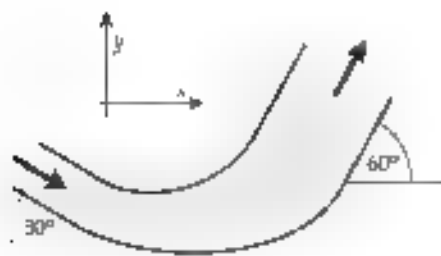


Figure P 4.16

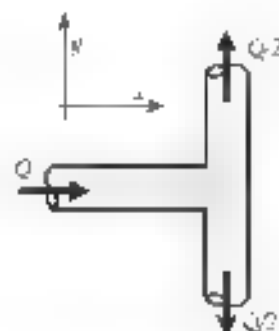


Figure P 4.17

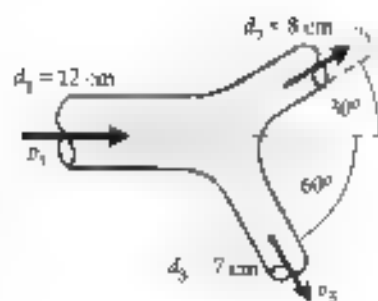


Figure P 4.17

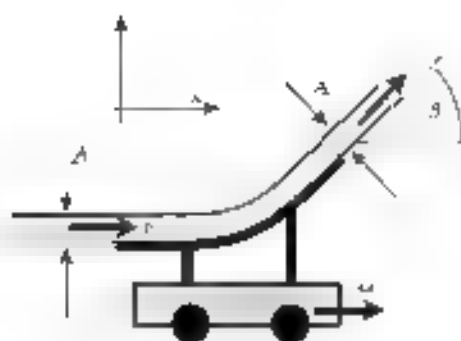


Figure P 4.19

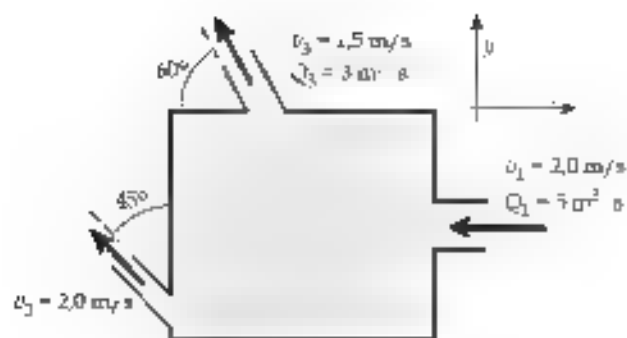


Figure P 4.20



Figure P 4.21



## CHAPITRE 5

## L'ÉQUATION D'ÉNERGIE

## Table des matières

5.1	Introduction	3
5.2	Équation générale de l'énergie	3
5.3	Les types de travaux	6
5.4	Écoulement stationnaire : équation d'énergie	7
5.5	Écoulements incompressibles : hauteur et pertes de charge	8
5.6	Équation de Bernoulli	10
5.7	Exemples	11
5.8	La variation de pression normalement aux lignes de courant	15
5.9	EXERCICES	19





### 5.1 Introduction

Au chapitre précédent le théorème du transport a été appliqué aux grandeurs physiques de masse et de quantité de mouvement du système. En identifiant l'énergie au paramètre  $B$  dans l'expression du théorème du transport nous obtiendrons l'équation générale d'énergie. C'est toutefois la forme que cette équation prend en situation d'écoulement stationnaire qui retiendra notre attention.

### 5.2 Équation générale de l'énergie

Dans l'expression du théorème du transport (3-5), le paramètre  $B$  est identifié à l'énergie.

$$\text{et puisque } b = \frac{B}{m}, \text{ il vient } b = e = \frac{E}{m}$$

où,  $e$  = énergie massique du système en J/kg.

On obtient alors

$$\frac{dE_{\text{sys}}}{dt} = \frac{dE_{\text{vc}}}{dt} + \sum_i \dot{E} - \sum_j \dot{E} \quad (5-1)$$

La grandeur  $\dot{E}$  représente le débit énergétique c'est-à-dire le flux d'énergie par unité de temps du fait de l'écoulement à travers une entrée ou une sortie du volume de contrôle (J/s ou W). En effet la matière en écoulement transporte avec elle son énergie et si elle sort du volume de contrôle, ce dernier comportera d'autant moins d'énergie.

En général,  $\dot{E}$  pour une surface de passage  $A$  (entrée ou sortie) est donnée par

$$\dot{E} = \int_A \rho v e_n dA$$

Toutefois, si l'énergie massique  $e$  peut être considérée uniforme sur la surface de passage alors le résultat précédent prend la forme simplifiée suivante

$$\dot{E} = \int_A e \rho v_n dA = e \int_A \rho v_n dA = me \quad (5-2)$$

#### Discussion sur l'énergie totale $E$

$E$ , l'énergie totale, représente la somme des énergies potentielle et cinétique de l'ensemble des particules constituant le système. On trouve utile de la traiter comme résultant de la somme de trois termes.

1)  $U$  : énergie interne de la substance. Les molécules sont animées d'un mouvement aléatoire (agitation thermique) qui est (ou à fait indépendant du fait que le fluide soit en écoulement ou non et auquel on peut associer une énergie cinétique  $U_p$ . Par ailleurs, les particules de fluide interagissent entre elles par le biais de forces intermoléculaires auxquelles on peut associer une énergie potentielle d'interaction  $U_F$ . L'énergie interne  $U$  correspondra alors à la somme de ces deux quantités ( $U = U_p + U_F$ ). Pour les fluides incompressibles,  $U$  dépend exclusivement de la température de la substance. Une description plus complète de l'énergie interne d'une substance est présentée au chapitre 1 de la partie sur la thermodynamique de cet ouvrage.

2)  $\frac{1}{2}mv^2$  : énergie cinétique de l'écoulement. Comme  $v$  est la vitesse de l'écoulement, cette grandeur représente l'énergie cinétique associée au fait que le fluide est en écoulement.

3)  $mgz$  : énergie potentielle de gravité.

Notons que si la masse se trouvait dans un autre champ de force (que le champ gravitationnel), un champ électromagnétique externe, par exemple, il faudrait ajouter un terme d'énergie potentielle lui correspondant.

Ainsi un bloc de masse  $m$  se déplaçant à  $v$  m/s et se situant à  $z$  m d'élévation sera caractérisé par une énergie totale  $E$  valant

$$E = U + \frac{1}{2}mv^2 + mgz \quad (5-3)$$

Souvent la somme  $\frac{1}{2}mv^2 + mgz$  est désignée par le vocable « d'énergie mécanique ».

Donc :

$$e = \frac{E}{m} = u + \frac{v^2}{2} + gz \quad (5-4)$$

où

$$u = \frac{U}{m} \quad (\text{énergie interne massique}) \quad (5-5)$$

#### Premier principe de la thermodynamique

En vertu du premier principe de la thermodynamique (principe de conservation de l'énergie), le contenu énergétique d'un système ne peut être modifié que par l'apport d'énergie sous forme de travail, ou sous forme de chaleur. Les conventions de signe s'appliquant au calcul du travail, et de la chaleur sont :

i)  $W > 0$  si le système fait un travail sur son environnement (énergie sort du système)

ii)  $Q > 0$  si l'énergie entre dans le système.

La figure 5.1 résume ce qui précède.

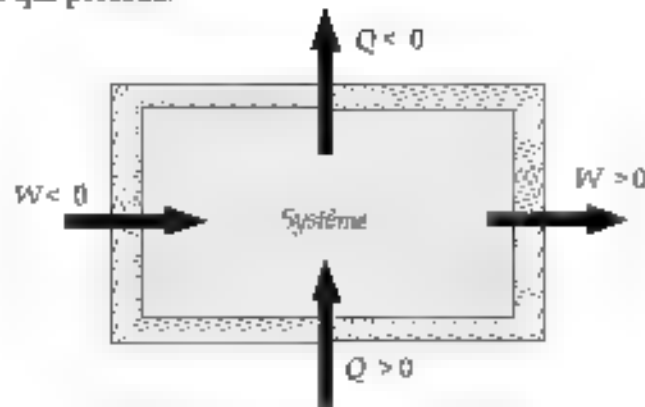


Figure 5.1 Conventions de signes pour le travail et la chaleur

Le principe de conservation d'énergie pour le système s'écrit alors

$$E_2 - E_1 = Q_1 - W$$

Dans le cas d'un écoulement, c'est le taux de variation de l'énergie qui nous intéresse

$$\frac{dE_{\text{se}}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_2 - E_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta t} - \frac{W}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_{\text{se}}}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} \quad (5-6)$$

$\dot{Q}$  et  $\dot{W}$  désignent alors les taux de transfert d'énergie sous forme de chaleur et de travail, respectivement. Le taux de transfert de travail est communément appelé puissance.

En combinant les équations (5-1), (5-2) et (5-6), on obtient l'équation générale d'énergie quand l'énergie massique est uniforme à travers les sections de passage:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dE_{\text{se}}}{dt} + \sum_i \dot{m} e_i - \sum_e \dot{m} e_e \quad (5-7)$$

En situation d'écoulement stationnaire,  $\frac{dE_{\text{se}}}{dt} = 0$ . Ainsi l'équation (5-7) prend la forme simplifiée

$$\dot{Q} - \dot{W} = \sum_i \dot{m} e_i - \sum_e \dot{m} e_e$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \sum_i \dot{m} \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \sum_e \dot{m} \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \quad (5-8)$$

### 5.3 Les types de travaux

On scinde généralement le travail total  $W$  en trois termes, c'est-à-dire qu'on écrit

$$W = W_r + W_{p\tau} + W_{pressur}$$

$W$	travail effectué par les forces de frottement visqueux (cisaillement, $\tau$ ) sur les parois du volume de contrôle (VC).
$W_{p\tau} = W_p + W_r$	travaux effectués par une turbine ( $W_r$ ) et une pompe ( $W_p$ ) regroupés dans le symbole $W_{p\tau}$ . Notons que $W_r > 0$ et $W_p < 0$ , par convention.
$W_{pressur}$	travail effectué par les forces de pression aux entrées et sorties du volume de contrôle.

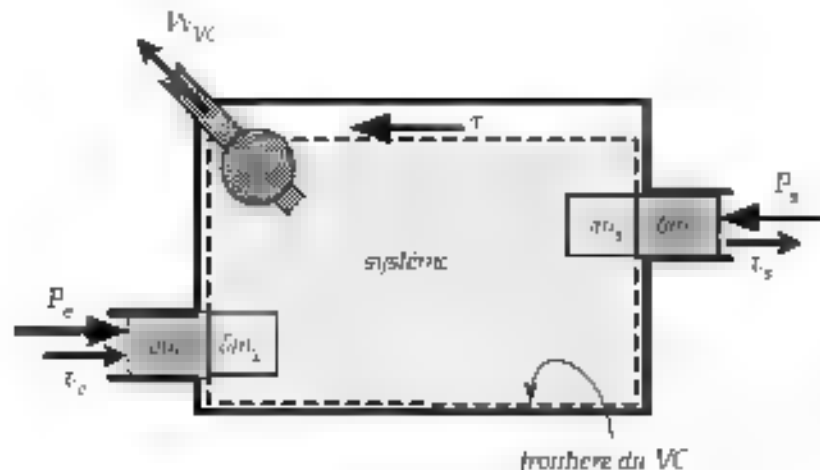


Figure 5.2 Illustration des « forces » responsables de travaux et du flux de masses aux entrées et sorties du VC

#### Calcul de $W_{pressur}$

À la figure 5.2,  $\dot{m}_e$  et  $\dot{m}_s$  représentent les masses qui vont entrer et sortir du volume de contrôle durant  $dt$ . Or  $\delta m_s$  (qui fait partie du système) doit déplacer  $\delta m_e$  afin d'évacuer le VC et  $\delta m_e$  doit déplacer  $\delta m_s$  (qui fait partie du système) pour s'y introduire. Dans chaque cas, une dépense en énergie (un travail) est effectuée.

La figure 5.3 montre un élément de masse  $\delta m$  se déplaçant de  $dx$  durant  $dt$  sous l'action de la pression  $P$ .

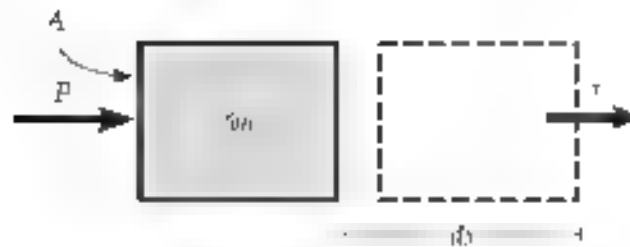


Figure 5.3 Paramètres intervenant dans le calcul de  $W_{\text{pression}}$

Le travail infinitésimal effectué par la pression  $\delta W_{\text{pression}}$  est alors

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{pression}} &= F_{\text{pression}} dx = PA dx \\ \Rightarrow W_{\text{pression}} &= \frac{\delta W_{\text{pression}}}{dt} = PA \frac{dx}{dt} = PA v \end{aligned}$$

Multipliant par  $\rho/\rho$  et regroupant

$$W_{\text{pression}} = \frac{P}{\rho} (\rho A dx) = m \frac{P}{\rho}$$

Notons  $W_{\text{pression}} > 0$  à une sortie;  $W_{\text{pression}} < 0$  à une entrée

La puissance totale devient alors

$$W = W_{\text{éc}} + W_{\text{r}} + \sum_e m \frac{P}{\rho} - \sum_e m \frac{P}{\rho} \quad (5-9)$$

avec , 
$$W_{\text{éc}} = W_{\text{F}} + W_{\text{T}} \quad (5-10)$$

### 5.4 Écoulement stationnaire : équation d'énergie

En situation d'écoulement stationnaire, on emploie l'équation (5-8). Si on incorpore le résultat (5-9) et que l'on réarrange les termes, il vient

$$Q - W - W_{\text{éc}} = \sum_e m \left( u + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) - \sum_e m \left( u + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) \quad (5-11)$$

Rappelons les hypothèses qui nous ont conduits au résultat (5-11).

- a) écoulement uniforme sur les surfaces de passage aux entrées et aux sorties.
- b) écoulement stationnaire

Dans la mesure que les conditions ci-dessus sont satisfaites, l'équation (5-11) est tout à fait générale. Elle s'applique aux écoulements compressibles et incompressibles. C'est d'ailleurs

celle-ci, qui sera utilisée (sous une forme légèrement modifiée) en thermodynamique lorsque nous aurons à traiter des problèmes d'écoulement. S'agissant d'écoulements incompressibles, toutefois, il est d'usage de la récrire sous une forme quelque peu simplifiée en invoquant les concepts de hauteur de charge et de pertes de charge.

### 5.5 Écoulements incompressibles : hauteur et pertes de charge

A titre de volume de contrôle, considérons un tube de courant reuant les points d'entrée 1 et de sortie 2. Puisque la surface de passage  $dA$  est infinitésimale, les propriétés (pression, vitesse, etc.) ne varient à travers celle-ci.



Figure 5.4 Tube de courant comme volume de contrôle

On a donc

$$\delta m_2 = \delta m_1 = \delta m$$

On peut employer (5-11) qui devient

$$\delta Q - \delta W_{\text{th}} - \delta W = \delta m \left[ u_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right] - \left[ u_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right]$$

Notons que le débit massique étant infinitésimal, il en sera de même des taux de transfert de travail et de chaleur. Si l'écoulement est incompressible ( $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ), on obtient, en réarrangeant

$$\frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = \left[ \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 \right] + \frac{\delta W_{\text{th}}}{\delta m g} + \frac{\delta W_P}{\delta m g} + \frac{1}{g} \left[ (u_2 - u_1) \frac{\delta Q}{\delta m} \right] \quad (5-12)$$

Définissons

$$H = \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z \quad (5-13)$$

$$w_{\text{th}} = \frac{\delta W_{\text{th}}}{\delta m} = \frac{\delta W_T}{\delta m} + \frac{\delta W_P}{\delta m} = w_T + w_P \quad (5-14)$$

$$w = \frac{\delta W_P}{\delta m} \quad j = \frac{\delta Q}{\delta m} \quad (5-15)$$

et

$$h_{1-2} = \frac{1}{g} [(u_2 - u_1) - q] \quad (5-16)$$

Alors, l'équation (5-12) devient

$$H_2 = H_1 + \frac{w_K}{g} + \frac{w_L}{g} + h_{1-2} \quad (\text{mètres}) \quad (5-17)$$

**H** Hauteur de charge en un point. La hauteur de charge peut être interprétée comme représentant « l'énergie mécanique » (en mètres) associée à un point de l'écoulement (voyez l'exemple 5.1)

$w_T, w_P$  Travail massique résultant de l'action d'une turbine ou d'une pompe

$w$  Travail massique dû au cisaillement agissant sur les parois du V.C.

$q$  Chaleur massique échangée entre le système et son environnement

$h_{1-2}$  Pertes de charge. Dans les écoulements incompressibles, il est d'usage de regrouper les termes d'échange de chaleur et de variation d'énergie interne. Nous revenons sur la signification physique de cette quantité.

L'évaluation de  $w$  et de  $h_{1-2}$  pour une ligne de courant spécifique n'est possible que dans certains cas plutôt rares (vous pouvez consulter l'annexe du chapitre 6 pour un exemple). D'emblée, remarquons que ces grandeurs sont non-nulles que dans les cas d'écoulements visqueux, la chose est évidente concernant  $w$  et peut être prouvée en ce qui a trait à  $h_{1-2}$ . Au chapitre 6, nous considérerons une classe d'écoulements visqueux particulière. Nous verrons qu'il est possible sous certaines conditions de rendre le travail de cisaillement nul et d'associer l'ensemble des « effets visqueux » au terme de pertes. En conséquence, on obtient la forme plus simple

$$H_2 = H_1 + \frac{w_K}{g} + h_{1-2} \quad (\text{mètres}) \quad (5-18)$$

Cette dernière formulation de l'équation d'énergie est celle dont nous aurons usage dorénavant en dynamique des fluides incompressibles (avec les aménagements qui s'appliqueront au chapitre 6).

Que représente le terme de pertes de charge?

En thermodynamique, on montre que

$$h_{1-2} = \frac{1}{g} (u_2 - u_1) - q_1 \geq 0$$

où

$$h_{1-2} = \begin{cases} = 0 & \text{si l'écoulement est idéal} \\ > 0 & \text{si l'écoulement est visqueux} \end{cases}$$

Considérons un écoulement sans apport d'énergie du fait d'une pompe ou d'une turbine.

$$H_1 = H_2 + h_{1-2} \quad \text{donc} \quad H_1 > H_2 \quad \text{si} \quad h_{1-2} \neq 0 \quad (5-19)$$

Si on admet que  $H_1$  et  $H_2$  quantifient l'énergie mécanique associée aux points 1 et 2, alors  $h_{1-2}$  doit être vu comme une contribution qui « soustrait » de l'énergie mécanique à l'écoulement. La définition (5-16) indique que cette « soustraction » correspond en fait à une conversion d'énergie mécanique en énergie interne et transfert de chaleur. Dans les écoulements de liquides, la variation d'énergie interne est souvent négligeable (sauf si le VC est refroidi ou chauffé par un agent extérieur ou qu'il est isolé). Lorsque c'est le cas, le gros des pertes correspond en fait à de l'énergie dissipée sous forme de chaleur par le système vers son environnement ( $q < 0$ ).

Une conséquence du résultat (5-19) est que l'écoulement *avec pertes* est *irréversible*. Sans la contribution d'une pompe, il ne peut s'effectuer que du point de hauteur de charge plus élevée vers le point de hauteur de charge plus faible.

## 5.6 Équation de Bernoulli

En contrepartie de ce qui précède, un écoulement *idéal* (ou non visqueux) est *réversible*. En effet, si l'écoulement est *sans pertes*, (5-19) devient

$$H = H_2 \quad (5-20)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \quad (5-21)$$

On observe que les points 1 et 2 sont interchangeable dans cette expression. Ce dernier résultat porte le nom d'équation de Bernoulli. Rappelons qu'il est applicable aux écoulements non-visqueux (sans pertes) qui ne comportent pas de contributions de pompe ou de turbine. Bien que bon nombre d'hypothèses doivent être satisfaites pour qu'on puisse l'employer, l'équation de Bernoulli joue un rôle prépondérant dans l'analyse et la caractérisation des écoulements incompressibles.



## 5.7 Exemples

**Exemple 5.1** Soit le réservoir de la figure 5.5. Déterminez la vitesse du jet en 2 pour un écoulement sans pertes si la pression absolue en 1 est

a)  $P = P_{\text{atm}} = P_0$ ,    b)  $P = 2P_{\text{atm}} = 2P_0$

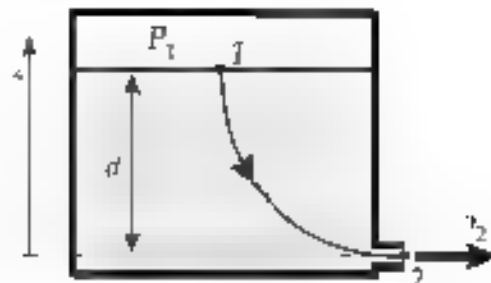


Figure 5.5: Exemple 5.1

L'écoulement est sans pertes; il n'y a pas de pompe ni de turbine

$$w_p = w_T = h_{1-2} = 0$$

On a représenté un exemple de ligne de courant liant deux points. On invoque l'équation de Bernoulli.

$$H_1 = H$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

a) Considérons d'abord la différence  $\frac{z_2 - v_2^2}{2g}$

Du fait de l'équation de continuité  $Q = Q_1$ , on constate que  $v_1 = v_2 \frac{d_2}{d_1}$  ou, encore

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{d_1^4}{d_2^4}$$

À titre d'exemple si  $\frac{d_1}{d_2} = 10$  et  $\frac{z_2 - v_2^2}{2g} = 10^3$ , le terme représentant l'énergie cinétique en 2 vaut 10 000 fois le terme correspondant en 1

Alors  $\frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = \frac{z_2 - z_1}{2g}$  ce qui revient essentiellement à poser  $v_1 = 0$

Il est donc d'usage dans ce genre de circonstance de poser la vitesse nulle à la surface d'un réservoir

$$\text{Alors, puisque} \quad P_1 = P_2 = P_{\text{atm}} = P_0 \quad z_1 = 0 \quad z_2 = 0$$

$$\text{on déduit} \quad \Rightarrow \quad v_{1z_1} = \sqrt{2gd}$$

On observe que ce résultat correspond à la vitesse qu'un corps lâché d'un repos aurait après être tombé de  $d$  mètres dans le vide. On interpréterait, alors le phénomène comme une conversion d'énergie mécanique de gravité en énergie mécanique cinétique. Nous pouvons faire le même constat en ce qui a trait à la situation traitée.

*Remarque :* Les termes de pression ont été exprimés en pression absolue. Puisque chacun de ceux-ci peut être écrit comme  $P_{\text{abs}} = P_{\text{atm}} + P_{\text{rel}}$ , les contributions de la pression atmosphérique de part et d'autre du signe d'égalité s'annulent. On aurait obtenu le même résultat si les pressions avaient été exprimées en termes de pressions relatives, c'est-à-dire  $P_1 = P_2 = 0$ . C'est ce que nous ferons désormais.

$$\text{b) Maintenant} \quad P_1 = P_0, \quad P_2 = 0 \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 0$$

$$\text{Il vient} \quad \Rightarrow \quad v_{2z_2} = \sqrt{7 \frac{P_{1z_1}}{\rho} + gd} > v_{2z_1}$$

On remarque que le terme de pression ( $\frac{P_{1z_1}}{\rho} > 0$ ) contribue à augmenter la hauteur de charge en 1,  $H_{1z_1} > H_{gz_1}$  et de ce fait donne lieu à une plus grande vitesse de sortie ( $v_{2z_2} > v_{2z_1}$ ).

Bien que le terme de pression dans  $H$  ait été introduit pour rendre du compte du travail effectué par la pression à l'entrée et à la sortie, force est de constater qu'il se comporte de la même façon que les deux autres termes d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de gravité. Si on veut retenir l'interprétation utilisée plus haut à savoir que l'on observe une conversion d'une forme d'énergie mécanique en une autre, on est amené à considérer le terme de pression dans  $H$  comme un terme d'« énergie potentielle de compression » à l'instar de celle d'un ressort comprimé. Ainsi la hauteur de charge  $H$  peut tout à fait être vue comme une mesure de l'énergie mécanique totale associée en un point de l'écoulement si on accepte cette petite modification à la définition du concept d'énergie mécanique pour référence. (Voyez la note suivant, l'équation (5-3)).

**Exemple 5.2.** Le tube de venturi (ou venturi) est un appareil servant à mesurer le débit dans une conduite. Il peut être horizontal ou incliné. Exprimez le débit volumique en termes des grandeurs pertinentes.

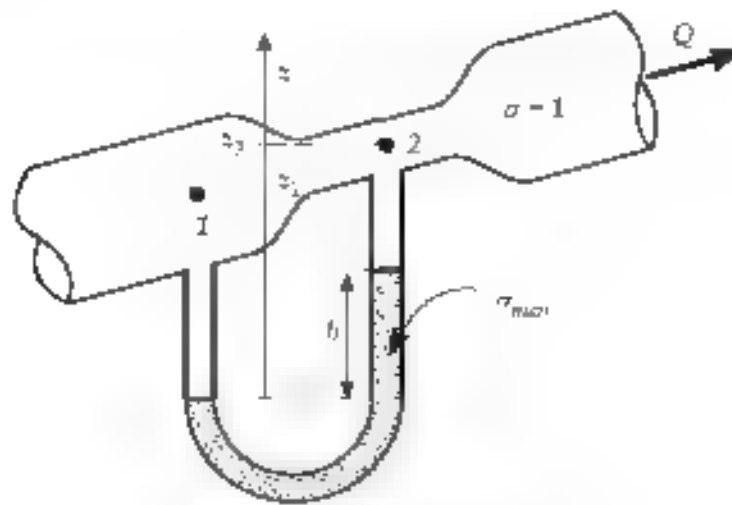


Figure 5.6 Tube de venturi

$$H_1 = H_2$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

qu'on peut écrire

$$(P_1 - P_2) + \rho g(z_1 - z_2) = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

Si  $A_1$  et  $A_2$  désignent les sections de passage en 1 et 2 respectivement, alors par continuité on trouve

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = K v_1 \quad \text{où} \quad K = \frac{A_1}{A_2}$$

Ainsi

$$P_1 - P_2 + \rho g(z_1 - z_2) = \frac{\rho}{2} v_1^2 (K^2 - 1) = \frac{\rho Q^2}{2 A_1^2} (K^2 - 1) \quad (\text{E5.2.1})$$

Utilisant les méthodes vues au chapitre 2 pour l'analyse d'un système manométrique

$$P_1 + \rho g z_1 - \rho_{\text{man}} g h = P_2 + \rho g z_2 \quad \text{ou} \quad P_1 - P_2 = \rho g h$$

Après avoir réarrangé

$$P_1 - P_2 + \rho g(z_1 - z_2) = \rho g h \quad (\text{E5.2.2})$$

Si on égale (E5.2.1) et (E5.2.2)

$$\frac{\rho Q^2}{2 A_1^2} (K^2 - 1) = \rho g h \quad \text{ou} \quad Q = \frac{A_1}{\sqrt{K^2 - 1}} \sqrt{2 g h}$$

Donc

$$Q = A \sqrt{\frac{2g(\sigma_{\text{eau}} - \sigma_{\text{air}}) I}{k}} = k \sqrt{h}$$

Notons que la différence d'élévation  $z_2 - z_1$  n'apparaît pas explicitement dans l'expression. Étant donné un débit  $Q$ , qu'est-ce qui serait modifié dans le résultat ci-haut si le venturi est orienté à l'horizontale?

**Exemple 5.3:** Une pompe est utilisée pour pomper l'eau d'un réservoir ouvert à l'atmosphère. Le jet en 2 doit sortir à 5 m/s. Quelle puissance doit fournir la pompe dans les deux cas suivants

- l'écoulement est sans pertes,
- les pertes de charge entre 1 et 2 sont  $h_{1-2} = 4$  m.

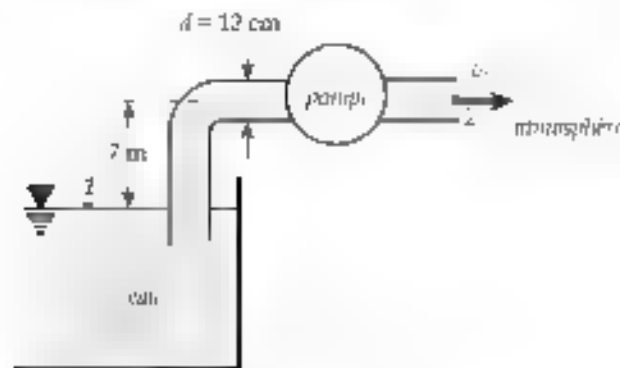


Figure 5.7 Figure de l'exemple 5.3

a)  $h_{1-2} = 0$

$$H = H_1 + \frac{v_1^2}{2g}$$

$$w_p = g(H_1 - H_2)$$

Puisque

$$P_1 = P_2 = p_{\text{atm}} = z_1 = 0 \quad v_1 = 5 \text{ m/s} \quad z_2 = 7 \text{ m}$$

$$\Rightarrow w_p = \left[ \frac{v_1^2}{2} + gz_2 \right] = \left[ \frac{5^2}{2} + 9,81 \cdot 7 \right] = 81,17 \text{ J/kg}$$

$$\dot{m} = \rho v_1 A_1 = 56,55 \text{ kg/s}$$

$$W_{\text{pe}} = \dot{m} w_p = 4590,1 \text{ W}$$

$$b) \quad h_{T_2} = 8 \text{ m}$$

$$H_2 = H_1 + \frac{w_{T2}}{g} + h_{T_2}$$

$$w_{T2} = g(H_2 - H_1 - h_{T_2})$$

$$w_{T2} = \left[ \frac{v^2}{2} + g(z_2 + h_{T_2} - z_1) \right] = 120.41 \text{ J/kg}$$

$$W_{T2} = \eta W_{P2} = 6809,0 \text{ W}$$

Reproduire les mêmes conditions aux deux points de l'écoulement dans le deuxième cas

$h_{T_2} = 5 \text{ m}$  requiert un apport en énergie plus important de la part de la pompe. Il est donc naturel d'associer  $h_{T_2}$  aux pertes énergétiques qui interviennent entre ces deux points.

Dans le cas qui nous occupe, ces pertes de charge exprimées en puissance sont donc

$$W_{T2} = mgh = 56,54 \cdot 9,81 \cdot 4 = 2219 \text{ W} = W_{P2} - W_{P1}$$

On note que les pertes exprimées en puissance correspondent exactement à la différence des puissances calculées dans les deux cas considérés

### 5.8 La variation de pression normalement aux lignes de courant

L'équation de Bernoulli et de façon plus générale l'équation d'énergie permettent de prédire comment varie la pression quand on se déplace le long d'une ligne de courant. Mais qu'en est-il si on se déplace transversalement à celle-ci? Par exemple de la ligne de courant A à la ligne de courant B de la figure 5.8? La figure 5.8 a. représente les forces de pression ainsi que le poids agissant sur un élément de fluide infinitésimal.

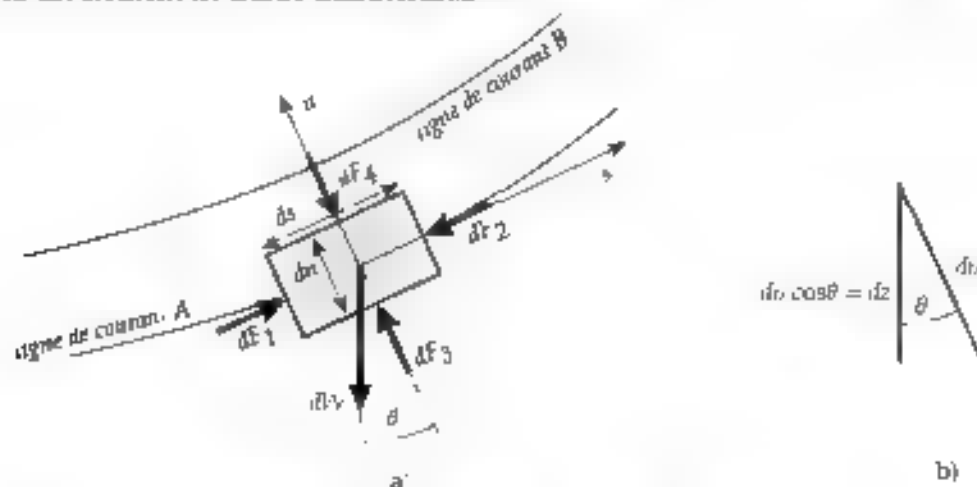


Figure 5.8 Forces agissant sur un élément de fluide

Par souci de clarté dans le propos, nous avons omis de faire apparaître les forces de cisaillement qui agissent sur les différentes surfaces de l'élément. Les axes tangent ( $s$ ) et normale ( $n$ ) à la trajectoire sont représentés. L'élément de fluide a une profondeur (normale à la page) de  $dx$ . On peut appliquer la deuxième loi de Newton à l'élément selon chacun des deux axes en question, à savoir :

$$\sum F_s = dm \cdot a_s \quad (5-22)$$

$$\sum F_n = dm \cdot a_n \quad (5-23)$$

Écrire et résoudre l'équation (5-22) avec les forces représentées conduit directement à l'équation de Bernoulli. Pour un traitement plus général, il faut considérer de plus les forces de cisaillement qui ont été omises.

Écrire et résoudre l'équation (5-23), toutefois, conduit à un nouveau résultat. Les forces qui agissent selon l'axe normal ( $n$ ) sont les forces de pression agissant sur les surfaces intérieure et supérieure ainsi que la composante normale du poids (le cisaillement même s'il était présent n'agirait pas selon cet axe).

Alors :

$$\begin{aligned} \sum F_n &= dm \cdot a_n \\ \sum F_n &= dF_s - dF_t - dW \cos \theta = a_n \cdot dm \end{aligned} \quad (5-24)$$

Notons que

$$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot dn \cdot dx \cdot ds$$

La composante normale du poids s'écrit

$$dW \cos \theta = g \cos \theta \cdot dm = \rho g (dn \cos \theta \cdot dx \cdot ds)$$

Référent à la figure 5.8 b)

$$dW \cos \theta = \rho g \cdot dz \cdot dx \cdot ds$$

Les forces (microforces, en fait) de pression selon l'axe normal s'écrivent quant à elles

$$dF_s = P \cdot dA = P \cdot dx \cdot ds \quad \text{et} \quad dF_t = (P + dP) \cdot dA = (P + dP) \cdot dx \cdot ds \quad (5-25)$$

Par ailleurs, de la cinématique, on sait que

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (5-26)$$

où  $R$  désigne ici le rayon de courbure de la trajectoire (ligne de courant).

Insérant (5-25) et (5-26) dans (5-23), il vient

$$P - (P + dP) - \rho g \cdot dz = \rho \cdot \frac{v^2}{R} \cdot dn \cdot dx \cdot ds$$

C'est-à-dire :

$$-dP - \rho g \cdot dz = \rho \cdot \frac{v^2}{R} \cdot dn \quad (5-27)$$

Le fluide étant incompressible,

$$-dP - \rho g \cdot dz = -d(P + \rho g z)$$

Alors (5-27) devient

$$\frac{\partial (P + \rho g z)}{\partial n} = -\rho \frac{v^2}{R} \quad (5-28)$$

En général, la résolution de cette équation peut être assez complexe. Nous nous intéressons uniquement à décrire en termes qualitatifs le genre de prédictions qu'elle permet mais mentionnons d'abord un cas particulier important.

#### Lignes de courant rectilignes

Si l'écoulement est caractérisé par un ensemble de lignes de courant rectilignes, il vient  $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{u}$  et

$$\frac{\partial (P + \rho g z)}{\partial n} = 0$$

ce qui implique que  $P + \rho g z = c^te$  si on se déplace normalement aux lignes de courant. Alors dans le cas de la situation illustrée à la figure 5.9,

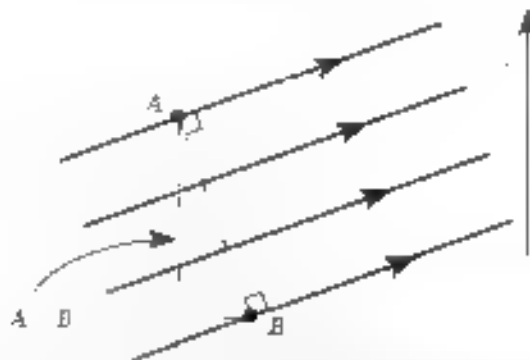


Figure 5.9 Variation de pression normalement aux lignes de courant

on aura

$$\begin{aligned} P_A + \rho g z_A &= P_B + \rho g z_B \\ P_A - P_B &= -\rho g (z_A - z_B) \end{aligned} \quad (5-29)$$

à savoir la pression varie de façon hydrostatique entre les deux points considérés.

#### Écoulement à l'horizontale

Si l'écoulement s'effectue dans le plan horizontal, on pose  $dz = 0$  dans (5-27) ou, de façon équivalente,  $z = c^te$  dans l'équation (5-28). On obtient alors

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \frac{v^2}{R} \quad (5-30)$$

Rappelons que l'axe  $n$  pointe en direction du centre de courbure de la trajectoire. Le résultat qui précède montre que dans le cas d'un écoulement horizontal, la pression va en décroissant quand on se rapproche du centre de courbure (figure 5.10)

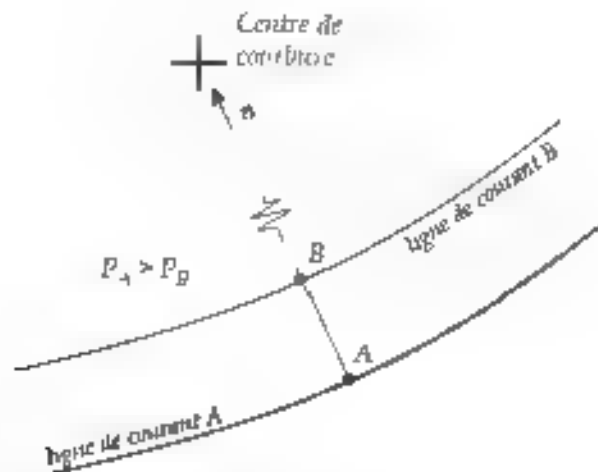


Figure 5.10 La pression va en diminuant quand on se rapproche du centre de courbure

Ce fait est observé, par exemple, au centre d'une dépression atmosphérique. Faisant abstraction des courants verticaux, le gros de la masse d'air impliquée effectue une rotation presque circulaire autour du centre de la dépression et la pression varie en accord avec (5-30).



## 5.9 EXERCICES

**NB :** À moins de mention particulière, considérez pour les exercices qui suivent que les pressions sont des pressions relatives et que les écoulements sont sans pertes.

**Problème 1** À la figure p 5.1 de l'eau est pompée à la vitesse de 1,8 m/s dans une conduite inclinée vers le haut (1 m d'élévation pour 5 m de longueur). L'eau est pompée à partir d'une fosse d'alimentation au repos. À une pression absolue de 2,34 kPa, l'eau se vaporise, formant des bulles. Calculez la longueur maximale du tuyau si on veut éviter ce phénomène. Considérez que  $P_{\text{vib}} = 101,3 \text{ kPa}$ .

Rép. :  $L = 49,6 \text{ m}$

**Problème 2** Un jet d'eau de 12 cm de diamètre monte verticalement à 20 m de hauteur, le jet demeurant de section circulaire (figure P 5.2). Calculez le débit d'eau et le diamètre du jet à 10 m d'élévation.

Rép. :  $Q = 0,224 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $d = 14,27 \text{ cm}$

**Problème 3** Une conduite circulaire longue de 5 m est inclinée vers le haut à  $30^\circ$ . Le diamètre passe de 10 cm à l'entrée à 15 cm à la sortie. Calculez le débit volumique d'essence ( $\sigma = 0,74$ ), si les indicateurs de pression à l'entrée et à la sortie donnent les mêmes valeurs.

Rép. :  $Q = 0,0614 \text{ m}^3/\text{s}$

**Problème 4** Un raccord conique incliné vers le bas voit son diamètre passer de 1,2 m à 0,6 m sur une différence de niveau de 3 m (figure P 5.4). La pression au point le plus haut est 69 kPa. Négligeant le frottement, calculez la pression au point le plus bas pour un débit d'eau de  $5,5 \text{ m}^3/\text{min}$ .

Rép. :  $P = 98,4 \text{ kPa}$

**Problème 5** À la figure P 5.5, un venturi dont le diamètre au col est de 100 mm est relié à une conduite de 250 mm dans laquelle s'écoule un débit de  $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$  d'huile ( $\sigma = 0,9$ ). On relie la conduite d'amenée et le col du venturi à un manomètre en U contenant du mercure ( $\sigma = 13,6$ ). Calculez la différence de niveau dans le manomètre.

Rép. :  $h = 0,571 \text{ m}$

**Problème 6** Un écoulement circule dans un tube réducteur tel qu'illustré à la figure P 5.6. Les pressions statiques aux points 1 et 2 sont mesurées à l'aide d'un manomètre en U inversé contenant de l'huile de densité  $\sigma < 1$ . Exprimez  $h$  en fonction du débit  $Q$ , des sections  $A_1$  et  $A_2$  de  $\sigma$  et de la constante gravitationnelle  $g$ .

$$\text{Rép. } h = \frac{Q}{A_1} \left[ \frac{A_2}{A_1} \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \sqrt{\frac{1}{2g(1-\sigma)}} \right]$$

**Problème 7** De l'eau à 20 °C est siphonnée d'un large réservoir vers l'atmosphère à travers un tube de diamètre constant (figure P 5.7). Sachant que la pression atmosphérique est de 101 kPa et que la pression absolue de vaporisation de l'eau à cette température est de 2,34 kPa, calculez la hauteur  $L$  maximale admissible si on veut siphonner l'eau en évitant la cavitation (vaporisation de l'eau). Si le diamètre de la conduite est 10 cm, quel est le débit volumique?

$$\text{Rép. } L = 8,08 \text{ m}, Q = 0,0920 \text{ m}^3/\text{s}$$

**Problème 8** De l'eau s'écoule à travers la conduite réductrice illustrée à la figure P 5.8. Calculez le débit volumique en fonction du diamètre  $d$ .

$$\text{Rép. } Q = 1,556 d^3$$

**Problème 9** Considérant la figure P 5.9, calculez le débit volumique en fonction du diamètre  $d$  si  $d/D = 1/2$ .

$$\text{Rép. } Q = 1,607 d^3$$

**Problème 10** Un jet d'eau s'élève jusqu'à la hauteur  $h$  comme il est illustré à la figure P 5.10. Calculez le débit ainsi que  $h$ .

$$\text{Rép. : } Q = 0,0252 \text{ m}^3/\text{s} \quad h = 8,4 \text{ m}$$

**Problème 11** Exprimez le débit volumique d'eau à travers la conduite de la figure P 5.11 en fonction des paramètres de la figure. Calculez-le si  $d = 8 \text{ cm}$ ,  $h = 50 \text{ cm}$  et  $\sigma = 0,9$ .

$$\text{Rép. } Q = \frac{\pi}{4} \sqrt{2g h (1-\sigma)} d^3 \quad Q = 0,00498 \text{ m}^3/\text{s}$$

**Problème 12** De l'eau circule dans une conduite en Y comme il est illustré à la figure P 5.12, l'écoulement se faisant dans le plan horizontal. Calculez la pression au point 3).

Rép.  $P_3 = 404,5 \text{ kPa}$

**Problème 13** De l'eau s'écoule d'un large réservoir représenté à la figure P 5.13. Déterminez le débit volumique et la pression au point A. Les sorties débouchent à l'atmosphère.

Rép.  $Q_1 = 0,0091 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $P_1 = 57,9 \text{ kPa}$

**Problème 14** Quelle est la puissance maximale que peut générer la turbine hydroélectrique de la figure P 5.14 ?

Rép. :  $W = 2,23 \text{ MW}$

**Problème 15** Une huile de lubrification ( $\rho = 871 \text{ kg/m}^3$ ) est pompée à travers une conduite de 20 cm de diamètre (figure P 5.15). Calculez la puissance fournie par la pompe pour un débit de  $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Rép.  $W = 16,7 \text{ kW}$

**Problème 16** De l'eau est en écoulement à travers un Y couché dans le plan horizontal (figure P 5.16). La pression à l'entrée du Y est de 200 kPa et le débit est de  $0,15 \text{ m}^3/\text{s}$  alors que le débit en 2 est  $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$ . Si par ailleurs les diamètres en 1 et 2 sont de 20 cm et en 3, de 10 cm, calculez les pressions en 2 et en 3.

Rép. :  $P_1 = 206,3 \text{ kPa}$ ,  $P_3 = 191,1 \text{ kPa}$

**Problème 17** Pour le dispositif de la figure P 5.17 calculez la hauteur  $h$  telle que l'écoulement sera stationnaire.

Rép.  $h = 98,8 \text{ cm}$

**Problème 18** Une pompe fournit 5 kW à l'écoulement illustré à la figure P 5.18. Quelle est la vitesse de l'écoulement à la sortie en B ? Que vaut la pression relative au point A situé juste avant la pompe ?

Rép. ,  $v_B = 13,48 \text{ m/s}$ ;  $P_A = 100,84 \text{ kPa}$

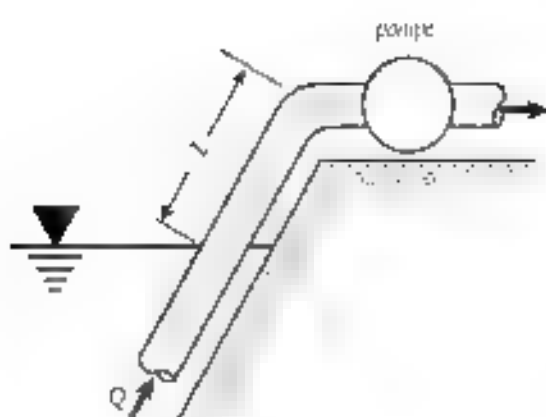


Figure P 5.1

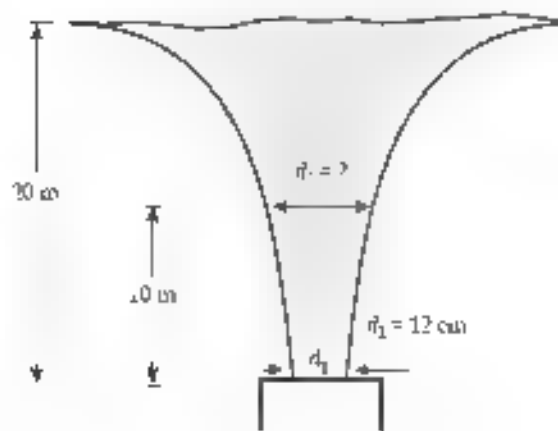


Figure P 5.2

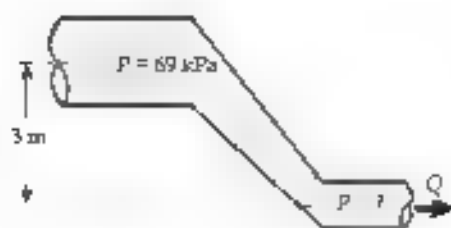


Figure P 5.3

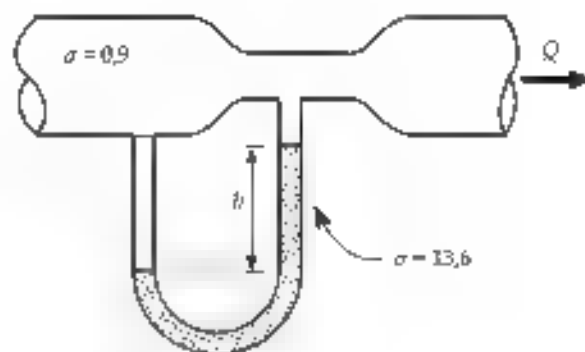


Figure P 5.4

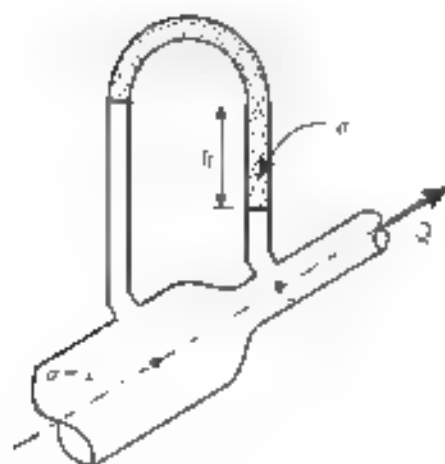


Figure P 5.5

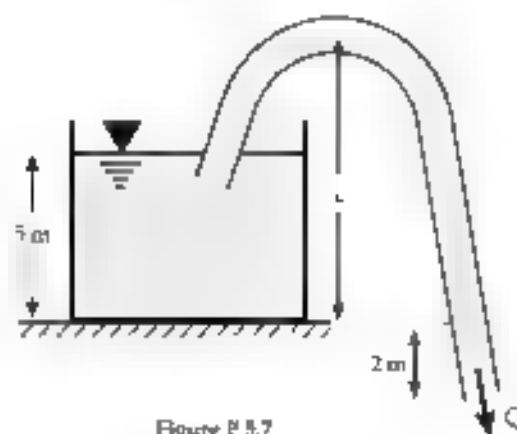


Figure P 5.6

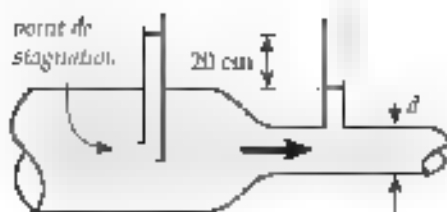


Figure P 5.8

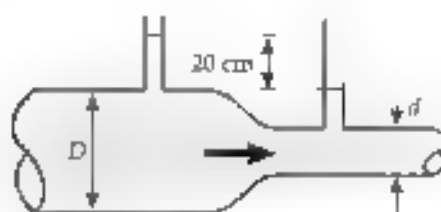


Figure P 5.9

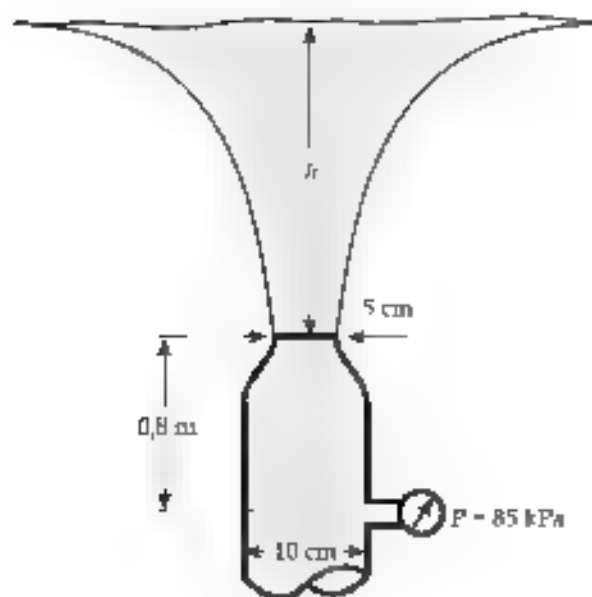


Figure P 5.10

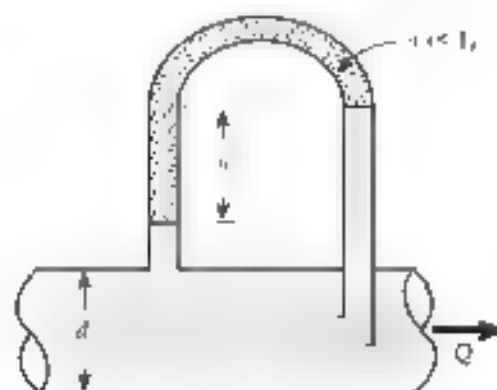


Figure P 5.11

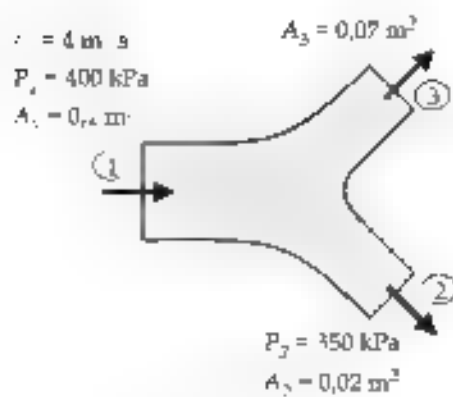


Figure P 5.12

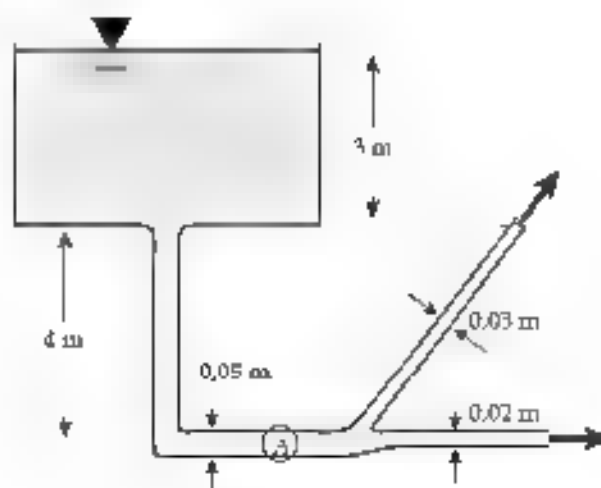


Figure P 5.13

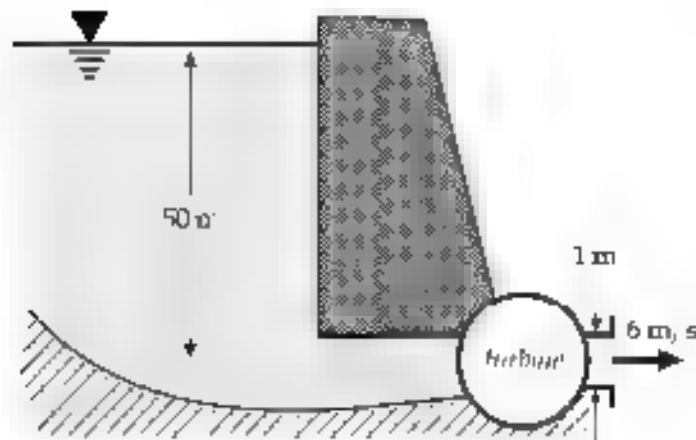


Figure P 5.14

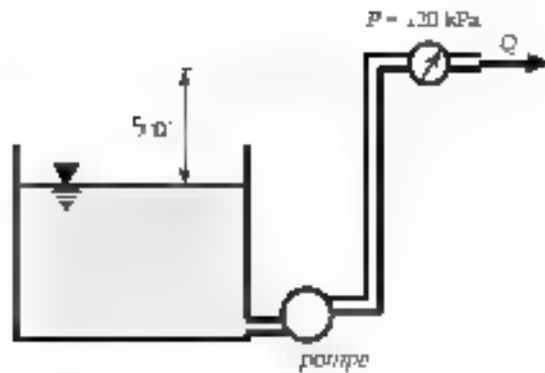


Figure P 5.15

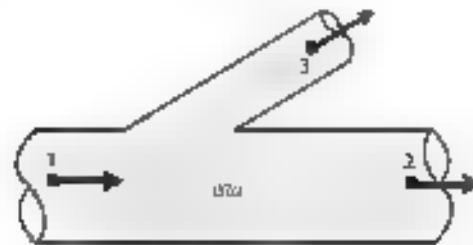


Figure P 5.16

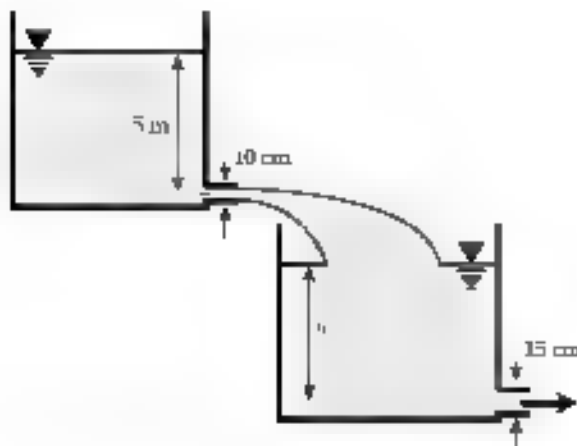


Figure P 5.17

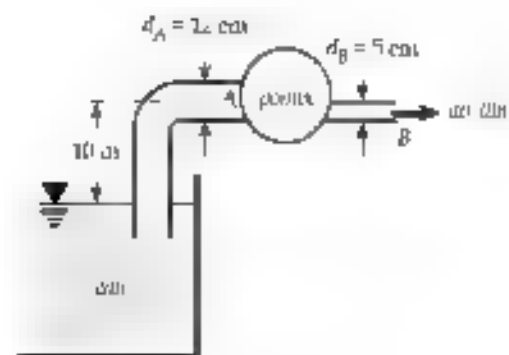


Figure P 5.18

# CHAPITRE 6

## LES ÉCOULEMENTS VISQUEUX EN CONDUITE

### Table des matières

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>6.2</b>	<b>Écoulements pleinement développés</b>	<b>3</b>
<b>6.3</b>	<b>Équation d'énergie pour les écoulements en conduite</b>	<b>4</b>
6.3.1	Facteur de correction $\alpha$	5
6.3.2	L'équation d'énergie pour les écoulements en conduite	6
<b>6.4</b>	<b>Considérations générales sur les pertes de charge d'une conduite</b>	<b>7</b>
6.4.1	La relation entre la pression et le cisaillement	9
6.4.2	Retour sur les mécanismes des effets visqueux	10
6.4.3	L'analyse dimensionnelle et l'équation de Darcy-Weisbach	11
<b>6.5</b>	<b>Les pertes de charge linéaires <math>h_L</math></b>	<b>14</b>
6.5.1	Les pertes linéaires dans les écoulements laminaires en conduite	14
6.5.2	Les pertes linéaires dans les écoulements turbulents en conduite	17
6.5.3	Résumé des résultats des sections 6.5.1 et 6.5.2	20
<b>6.6</b>	<b>Pertes singulières</b>	<b>21</b>
<b>6.7</b>	<b>EXERCICES</b>	<b>27</b>
<b>6.8</b>	<b>ANNEXE A1 : Analyse dimensionnelle</b>	<b>35</b>
6.8.1	Les bases de l'analyse dimensionnelle	35
6.8.2	Le théorème $\pi$	36
6.8.3	Applications de l'analyse dimensionnelle	37
<b>6.9</b>	<b>ANNEXE A2 : Discussion sur les pertes et les pertes moyennes.</b>	<b>41</b>





## 6.1 Introduction

La description complète de l'écoulement d'un fluide visqueux est particulièrement complexe en général. Il existe toutefois une classe d'écoulements de grande importance qui se prête à une étude plus simple : les écoulements en conduite.

Après avoir décrit en termes qualitatifs l'établissement d'un écoulement développé nous décrirons comment l'équation d'énergie présentée au chapitre précédent doit être modifiée pour rendre compte des situations décrites ce qui nous amènera à discuter du calcul des pertes dans les cas d'écoulements laminaires et turbulents.

## 6.2 Écoulements pleinement développés

Quand un fluide entre dans une conduite, son profil de vitesse se modifie pour rendre compte du changement de conditions auxquelles il est soumis. Si, par exemple, la conduite est alimentée par un réservoir le profil de vitesse à l'entrée sera pratiquement uniforme (figure 6.1). A mesure que le fluide progresse à travers la conduite, les effets visqueux (notamment la condition de non-glissement) entraînent une modification du profil de vitesse jusqu'à un certain point au-delà duquel sa forme n'évolue plus. On dit alors que l'écoulement est pleinement développé. La distance sur laquelle s'opère cette modification est dénommée longueur d'entrée  $L_e$ .

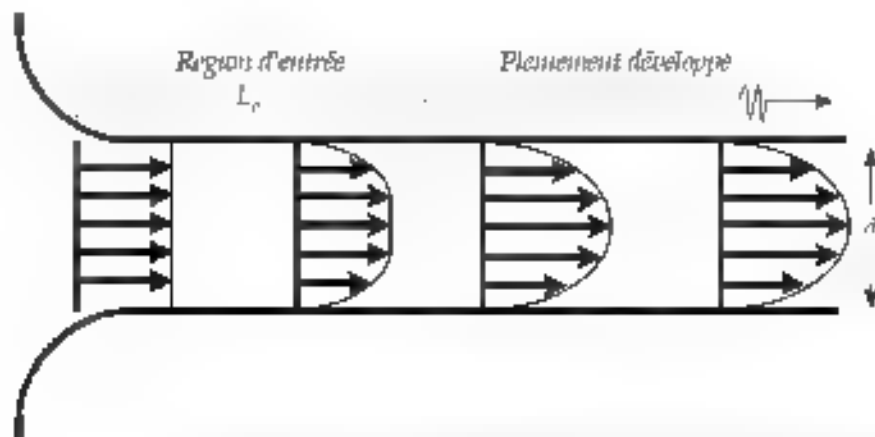


Figure 6.1 Modification du profil de vitesse dans la région d'entrée et écoulement pleinement développé

Si le diamètre de la conduite est  $d$ , alors on a environ

$$\begin{aligned} \frac{L_e}{d} &= 0,06 Re && \text{pour un écoulement laminaire} \\ \frac{L_e}{d} &= 4,4 (Re)^{\frac{1}{4}} && \text{pour un écoulement turbulent} \end{aligned}$$

**Exemple 6.1** Calculez la longueur d'entrée pour deux écoulements avec  $Re = 1500$  et  $Re = 50000$  respectivement à travers des conduites de 2 cm et 50 cm de diamètre

*Solution*

1)  $Re = 2000$

écoulement laminaire, alors :  $\frac{L_e}{d} \approx 0,06 Re = 90$

conduite de 2 cm de diamètre,  $L_e = 1,8$  m

conduite de 50 cm de diamètre,  $L_e = 45$  m

2)  $Re = 50000$

écoulement turbulent, alors :  $\frac{L_e}{d} = 4,4(Re)^{1/4} = 26,71$

conduite de 2 cm de diamètre,  $L_e = 53$  cm

conduite de 50 cm de diamètre,  $L_e = 13,35$  m

Notons que  $L_e$  peut être assez appréciable dans certains cas, notamment pour les écoulements laminaires. À la suite, nous négligerons cet effet de transition et considérerons que les écoulements sont pleinement développés

### 6.3 Équation d'énergie pour les écoulements en conduite

À la section 5.5 nous avons établi que l'équation d'énergie exprimée en termes de hauteurs de charges était donnée par l'équation (5-17)

$$H_1 = H_2 + \frac{w_{\text{visc}}}{g} + \frac{w_r}{g} + h_{t_1} \quad (5-17)$$

Ce résultat relie les conditions en deux points d'une ligne de courant spécifique. Toutefois, comme il a déjà été mentionné, l'évaluation du travail massique dû au cisaillement  $w_{\text{visc}}$  et des pertes de charge  $h_{t_1}$ , pose problème pour une ligne de courant quelconque. Dans le cas des écoulements en conduite, la pratique veut qu'on prenne comme volume de contrôle l'ensemble de la région à l'intérieur de la conduite. Comme la vitesse de l'écoulement s'annule à la paroi, la puissance associée au cisaillement s'annule elle aussi. L'ensemble des effets visqueux sont alors associés au terme de pertes de charge et l'équation d'énergie (en termes de hauteurs de charge) qui en résulte prend la forme plus simple de l'équation (5-18).

$$H = H_0 + \frac{w_{VC}}{g} + h_{L-z} \quad (5-18)$$

A quelle ligne de courant réère l'équation (5-18) alors? Quand on écrit et utilise (5-18) pour un écoulement dans une conduite, on est implicite que l'écoulement est considéré comme étant constitué de lignes de courant identiques caractérisées par des propriétés moyennes. Les quantités qui apparaissent dans  $H$  sont remplacées par leur valeur moyenne respective. Puisque la pression  $P$  et l'élévation  $z$  varient généralement peu à travers la section d'une conduite, leur terme associé dans  $H$  ne nécessitent pas véritablement considération. Il en va pas de même pour le terme représentant l'énergie cinétique ( $v^2/2g$ ) parce que la vitesse varie beaucoup d'un point à l'autre de la section de passage. Si on veut employer la vitesse moyenne  $\bar{v}$  pour le calcul de la hauteur de charge, on doit procéder à un aménagement dans la définition de  $H$

$$H = \frac{P}{\rho g} + \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g} + z \quad (6-1)$$

Le paramètre  $\alpha$  est un facteur de correction dont l'emploi est rendu nécessaire par le remplacement de la vitesse en un point de l'écoulement par la vitesse moyenne. Il joue pour l'équation d'énergie un rôle analogue au rôle joué par le facteur de correction  $\beta$  dans l'équation de quantité de mouvement au chapitre 4.

### 6.3.1 Facteur de correction $\alpha$

En général, le débit d'énergie cinétique à travers une surface de passage de volume de contrôle est donné par

$$E_k = \frac{1}{2} \int_A \rho v^3 v_n dA$$

Dans le cas d'une conduite,  $v_n = v$ . Si on veut faire usage de la vitesse moyenne  $\bar{v}$  on doit avoir l'égalité suivante

$$\frac{1}{2} \int_A \rho v^3 dA = \alpha \frac{\rho}{2} \bar{v}^3 A$$

$\alpha$  doit donc valoir

$$\alpha = \frac{\int_A v^3 dA}{\bar{v}^3 A} \quad (6-2)$$

Notons qu'on aura, comme il se doit,  $\alpha = 1$  pour un écoulement uniforme (écoulement idéal).

**Exemples 6.2:** Calculez le coefficient de correction pour un écoulement dont le profil de vitesse est donné par

$$v(r) = v_c \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^n \right]$$

*Solution*

Pour ce type d'écoulement la vitesse moyenne est donnée par l'expression (voyez l'exemple 4.2)

$$\bar{v} = \frac{n+2}{n+3} v_c$$

En vertu de (6-2),  $\alpha$  est donné par

$$\alpha = \frac{\int_0^R \left[ v_c \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^n \right)^2 2\pi r dr \right]}{\left( \frac{n+2}{n+3} v_c \right)^3 \pi R^3}$$

Après manipulation, on trouve

$$\alpha = \frac{3(n+2)^3}{3n+2n^2+1}$$

### 6.3.2 L'équation d'énergie pour les écoulements en conduite

Si l'équation d'énergie (5-18) est réécrite considérant la définition (6-1), il vient

$$H_1 = H_2 + \frac{w_{12}}{g} + h_{1-2} \quad (6-3)$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\bar{v}_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + z_2 + \frac{w_{12}}{g} + h_{1-2} \quad (6-4)$$

L'équation (6-4) est la forme de l'équation d'énergie que nous emploierons pour traiter des écoulements dans des conduites. Les pertes de charge  $h_{1-2}$  peuvent être le fait de plusieurs facteurs intervenant entre les points 1 et 2 considérés. On écrira alors

$$h_{1-2} = \sum h \quad (6-5)$$

#### 6.4 Considérations générales sur les pertes de charge d'une conduite

Soit l'écoulement pleinement développé d'un fluide à travers une conduite horizontale à section constante.



Figure 6.2 Écoulement développé à travers une conduite à section constante

Écrivant l'équation d'énergie (6-4) entre les points représentés à la figure 6.2, il vient

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\bar{v}_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + h_{1-2}$$

Puisque la section de la conduite ne change pas et que l'écoulement est pleinement développé, le profil de vitesse se maintient entre les deux points, c'est-à-dire

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{et} \quad \bar{v}_1 = \bar{v}_2$$

à savoir

$$\frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} + h_{1-2}$$

Donc :

$$h_{1-2} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} \quad (6-6)$$

Ce résultat est intéressant à plusieurs égards. D'abord, il indique que dans le cas d'un écoulement de conduite à l'horizontale les effets visqueux (les pertes) entraînent une chute de pression le long de l'écoulement. Rappelons en effet que les pertes sont exclusivement positives (si non nulles). C'est ce fait qui rend nécessaire l'introduction d'une ou de plusieurs pompes dans le circuit afin de maintenir l'énergie de l'écoulement (ou, de façon équivalente, la pression). Ensuite, le résultat qui précède donne une indication de la façon d'établir expérimentalement les pertes occasionnées entre deux points d'un écoulement. La mesure de la chute de pression conduit directement à la grandeur des pertes de charge.

Si la conduite est inclinée la différence d'élévation doit être considérée et l'équation d'énergie donne après réarrangement

$$P_1 - P_2 = \rho g (z_2 - z_1) + h_{1-2}$$

- Deux cas se présentent :
- la conduite est inclinée vers le haut
  - la conduite est inclinée vers le bas.

1) la conduite est inclinée vers le haut

La différence d'élévation  $z_2 - z_1$  étant positive, la pression chute nécessairement du point 1 vers le point 2, c'est-à-dire  $P_1 - P_2 > 0$ . On peut dire que les effets gravitationnels se combinent aux pertes pour faire diminuer la pression quand l'écoulement s'élève en hauteur.

2) la conduite est inclinée vers le bas

La différence d'élévation  $(z_2 - z_1)$  est négative. Le signe algébrique de la quantité

$$z_2 - z_1 + l_1 \neq 0$$

est maintenant indéterminé. On peut alors se retrouver dans la situation apparemment paradoxale que la pression soit moins importante en un point moins élevé. Il n'y a pas de contradiction : les effets gravitationnels qui contribuent à augmenter la pression quand l'élévation diminue sont en compétition avec les pertes qui agissent de façon à faire décroître la pression. Ce sont les importances relatives de ces deux effets qui détermineront le résultat. Notons que ce fait est nouveau, il n'y a pas l'équivalent pour les écoulements sans pertes.

Pour la conduite inclinée, l'équation d'énergie donne

$$l_{1,2} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + (z_2 - z_1)$$

ou encore

$$l_{1,2} = \frac{1}{\rho g} (P_1 + \rho g z_1 - P_2 + \rho g z_2)$$

Définissons une nouvelle quantité, la *pression piézométrique*

$$P' = P + \rho g z$$

Ainsi, les pertes peuvent s'écrire

$$l_{1,2} = \frac{P' - P'}{\rho g} = \frac{\Delta P'}{\rho g} \quad (6-7)$$

On remarque que l'équation (6-6) peut être considérée comme un cas particulier de (6-7) pour lequel  $z_1 = z_2$ . De plus, l'équation (6-7) convient aussi aux situations où les deux points considérés ne sont pas reliés par une conduite rectiligne. Dans la mesure que les sections (et profils de vitesse) sont identiques en 1 et en 2, (6-7) s'applique. Ainsi, l'écoulement peut être dévié par un coude ou, par exemple, passer à travers un robinet et l'équation (6-7) pourra être utilisée si les sections sont les mêmes aux deux points.

### 6.4.1 La relation entre la pression et le cisaillement

Soit un écoulement pleinement développé dans une conduite circulaire inclinée comme il est illustré à la figure 6.3. Considérons comme objet d'étude la matière à l'intérieur du cylindre de rayon  $r$  et de longueur  $L$ . Selon l'axe de l'écoulement, agissent sur le corps les forces dues à la pression aux deux extrémités ainsi que celle due au cisaillement sur le pourtour et, finalement, la composante du poids selon cet axe.

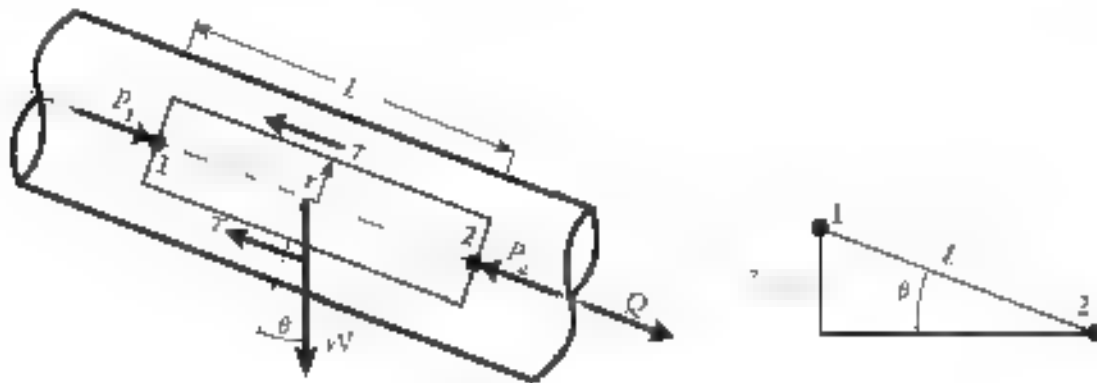


Figure 6.3 Forces agissant selon l'axe de l'écoulement sur un cylindre

La matière en mouvement vers la droite se déplace à vitesse constante. Les forces contribuant à l'accélérer vers le bas et la droite (composante du poids et forces dues à la pression) doivent être compensées par la force exercée par le cisaillement. On a donc :

Forces dues à la pression en 1 et en 2  $F_{p1} = \pi r^2 P_1$   $F_{p2} = \pi r^2 P_2$

Force due au cisaillement  $F_\tau = 2\pi r L \tau$

Composante du poids  $W_{\sin \theta} = mg \sin \theta = \rho (\pi r^2 L) g \sin \theta = \pi r^2 \rho g z_1 - z_2$

$$\sum F_{\text{ext}} = F_{p1} - F_{p2} - F_\tau + W_{\sin \theta} = 0$$

$$\sum F_{\text{ext}} = \pi r^2 P_1 - \pi r^2 P_2 - 2\pi r L \tau + \pi r^2 \rho g (z_1 - z_2) = 0 \quad \tau_r = 0$$

en réarrangeant :

$$\pi r^2 \left[ (P_1 - P_2) - \frac{2L}{r} \tau + \rho g (z_1 - z_2) \right] = 0$$

$$(P_1 + \rho g z_1) - (P_2 + \rho g z_2) - \frac{2L}{r} \tau = 0$$

Utilisant la définition de la pression piézométrique, on trouve

$$\Delta P' = \frac{2L\tau}{r} \quad (6-8)$$

Du fait de (6-7), il vient donc

$$h_{f,v} = \frac{\Delta P'}{\rho g} = \frac{2L\tau}{\rho g r} \quad (6-9)$$

L'équation (6-9) laisse à entendre que la connaissance de  $\tau$  permet de prédire les pertes. Toutefois, comme nous le verrons plus loin, ce problème ne peut être résolu que pour une certaine classe d'écoulements. Il reste que les résultats (6-8) et (6-9) nous permettent de faire quelques constats.

Considérant d'abord (6-9), on observe que les pertes varient linéairement avec la distance  $L$  entre les points 1 et 2. Ce type de pertes est dénommée *pertes h. linéaires* (ou régulières) et représentée par le symbole  $h_L$ . Aussi, puisque ces pertes dépendent de la contrainte de cisaillement, elles seront affectées par la viscosité  $\mu$  et les autres mécanismes conditionnant le cisaillement (voyez la section 6.4.2). Si on récrit (6-8) de façon légèrement différente, on a

$$\tau = \frac{\Delta P'}{2L} r \quad (6-10)$$

Carbons à l'esprit qu'étant donnés deux points, la quantité  $\Delta P'$  est une constante. En conséquence, la contrainte de cisaillement est proportionnelle à la position radiale  $r$ . Elle est donc nulle au centre et maximale à la paroi.

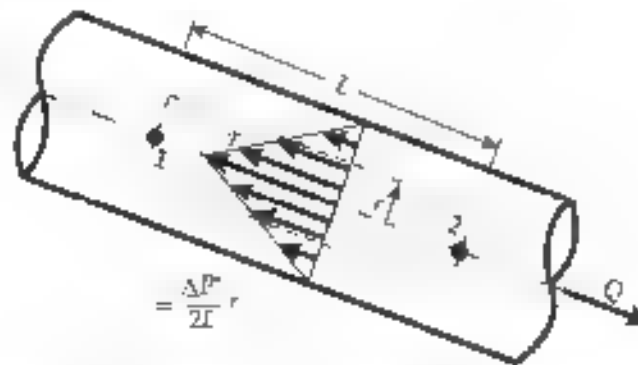


Figure 6.4 Dépendance de la contrainte de cisaillement avec  $r$

Notons que ce qui précède s'applique à tous les écoulements à travers des conduites à section constante. La nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent) n'affecte en rien les conclusions auxquelles nous sommes arrivées.

## 6.4.2 Retour sur les mécanismes des effets visqueux

À la section 1.2.3, nous avons décrit de façon qualitative des mécanismes qui donnent lieu à la génération de contraintes de cisaillement à travers l'écoulement. Nous avons invoqué l'action des forces intermoléculaires pour les liquides et le transfert de quantité de mouvement à l'échelle moléculaire pour les gaz comme sources du comportement observé. Nous avons été conduits à la loi de Newton qui décrit la relation entre la viscosité et la contrainte de cisaillement

$$\tau = \mu \frac{dv}{dr} \quad (6-11)$$



Toutefois, la loi de Newton ne décrit le comportement que des écoulements laminaires. En effet, dans ce cas, l'écoulement est ordonné, les différentes couches de fluide s'écoulant à la surface l'une de l'autre. En situation d'écoulement turbulent on assiste à un mélange intense de la matière. Bien que globalement les couches de fluide se déplacent selon l'axe de l'écoulement, la matière est brassée et un transfert de masse à l'échelle macroscopique s'opère d'une couche à l'autre (figure 6.6)

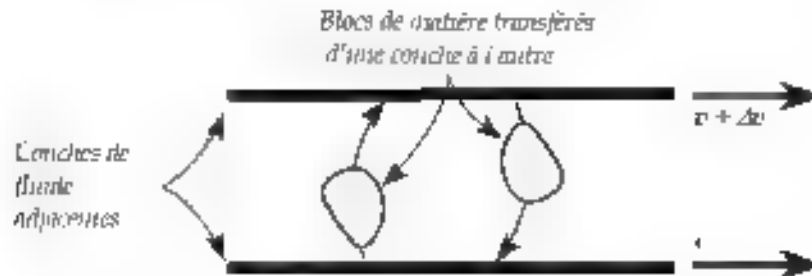


Figure 6.6 Transfert de masse à l'échelle macroscopique

Cet effet est analogue à ce qu'on observe pour les écoulements laminaires de gaz. Toutefois, dans ce cas de ces derniers, le transfert de matière s'opère à l'échelle moléculaire uniquement. Ici, le phénomène est tout autre : ce sont des masses appréciables qui transitent d'une couche à l'autre de façon désordonnée. Le transfert de quantité de mouvement qui en résulte se combine avec les autres mécanismes déjà mentionnés pour donner lieu au cisaillement dans le fluide s'écoulant de façon turbulente. Du fait de son ampleur, c'est cet effet qui prédomine. En fait, le cisaillement dû à ce facteur peut dépasser le cisaillement dû à d'autres facteurs de plusieurs ordres de grandeur. En conclusion, la loi de Newton ne suffit pas à rendre compte de ce phénomène mais une description mathématique plus complète dépasse le cadre de ce texte.

### 6.4.3 L'analyse dimensionnelle et l'équation de Darcy-Weisbach

Souvent, les écoulements posent problème si on veut en faire une description à partir des principes premiers de la physique (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et autres) et en conséquence, de faire des prédictions de nature théorique. La chose est particulièrement vraie s'agissant d'écoulements turbulents. Le comportement désordonné et imprévisible à bien des égards du fluide se prête mal à des prévisions de nature théorique (quoiqu'on puisse maintenant modéliser de tels comportements de façon à peu près correcte à l'aide d'ordinateurs).

Historiquement, on a donc eu recours à une approche empirique pour traiter de la situation. On entend par approche empirique le développement de résultats et de formules établis à partir de l'expérimentation essentiellement. Il faut comprendre que ces résultats et formules ne sont alors applicables qu'aux situations analysées en laboratoire. C'est ici qu'intervient l'analyse dimensionnelle. Le propos de ce texte n'est pas de traiter des méthodes de l'analyse dimensionnelle. Le lecteur intéressé à une première exposition est encouragé à consulter l'annexe A1 à la fin de ce chapitre. Toutefois, il convient d'en présenter de façon succincte les objets d'étude.

Souvent en raison de la complexité de la situation à étudier, on est amené à construire des modèles (le plus souvent réduits mais pas toujours) exposés à des conditions « similaires » à celles rencontrées dans la réalité afin de pouvoir faire des prédictions. Quelles sont les règles qui régissent les changements d'échelle des différents éléments de ce modèle, les structures, bien sûr, mais aussi les vitesses dans le cas d'écoulements ainsi que les caractéristiques mêmes du fluide à employer? Si, par exemple, il s'agit de modéliser l'effet d'un barrage sur une rivière et que le modèle aura une taille de 20 fois inférieure à la réalité, quel débit devra-t-on choisir? Quel fluide devra-t-on employer? De l'eau, comme dans le cas de la rivière?

L'analyse dimensionnelle affirme que si les deux situations peuvent être considérées « similaires », alors les conclusions auxquelles on arrive en étudiant le modèle peuvent être étendues (avec les aménagements nécessaires) à la situation réelle. Dans le cadre de ce type de traitement, on est amené à définir un certain nombre de quantités sans dimensions qui permettent d'établir ces « similitudes ». Le nombre de Reynolds constitue un exemple de grandeur de ce type. Voici trois grandeurs communément utilisées en mécanique des fluides.

$Re = \frac{\rho \bar{u} d}{\mu}$	Nombre de Reynolds	classifie en laminaire ou turbulent
$M = \frac{\bar{u}}{c}$	Nombre de Mach ( $c$ : vitesse du son)	détermine si l'écoulement est incompressible
$F = \frac{\bar{u}}{\sqrt{g' d}}$	Nombre de Froude	caractérise un écoulement avec une interface

Deux écoulements seront considérés similaires si, entre autres, ils présentent le même nombre de Reynolds. La notion de similitude présente un autre intérêt : elle permet d'appliquer des résultats obtenus dans des conditions particulières en laboratoire à toute une autre foule de situations qui ne feront pas, elles, l'objet d'étude dans la mesure que ces situations sont similaires à celles qui ont été étudiées en laboratoire.

Utilisant les méthodes de l'analyse dimensionnelle on peut établir l'équation de Darcy-Weisbach qui relie les pertes entre deux points d'une conduite rectiligne et certains paramètres caractéristiques de l'écoulement. Consultez l'annexe A1 pour une description complète de comment on arrive à ce résultat.

$$h_L = f \frac{L}{d} \frac{\bar{u}^2}{2g} \quad (6-12)$$

où  $f$  est un paramètre ajustable, le coefficient de friction (de Darcy)

Aucune autre hypothèse que le fait d'un écoulement à travers une conduite à section constante n'est nécessaire pour arriver à (6-12). Une grande part de son intérêt réside donc dans le fait qu'elle est applicable à toutes les situations d'écoulements que nous considérerons, laminaires et turbulents.

La question de la détermination des pertes anéaires pour un écoulement particulier n'a pas été réglée toutefois. L'expérience montre que pour une conduite donnée  $f$  est une constante dans les

cas d'écoulements très turbulents seulement. Exprimé autrement, les pertes varient comme le carré de la vitesse que pour ce type d'écoulement. Ainsi, le problème de relier les pertes aux différents paramètres de l'écoulement (vitesse, rugosité et propriétés du fluide) a été renvoyé à la détermination du paramètre ajustable  $f$ . Le problème reste donc entier. Quels sont les facteurs qui influenceront la grandeur du coefficient de friction  $f$ ?

L'analyse dimensionnelle établit ce que confirme l'expérience, que deux nombres sans dimensions déterminent, en général, la grandeur de  $f$  : la rugosité relative  $\varepsilon/d$  et le nombre de Reynolds.

L'intérieur d'une conduite présente toujours des aspérités. La grandeur moyenne de ces aspérités est appelée rugosité et désignée par le symbole  $\varepsilon$ . La présence de ces aspérités dévie l'écoulement et peut même conduire à la production de micro-tourbillons locaux.

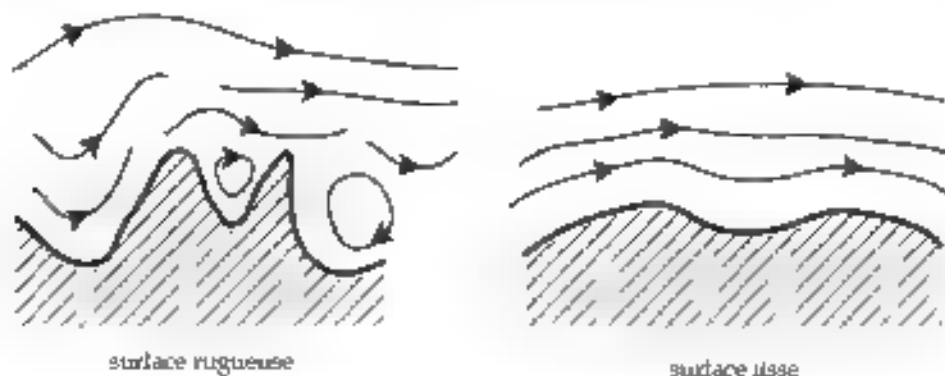


Figure 6.6 Effet de la rugosité sur l'écoulement

On comprendra que l'effet de la présence de ces aspérités sur l'écoulement dans son ensemble dépendra de l'importance relative de la rugosité en regard de la section de passage. Les conclusions auxquelles nous arriveront par la suite s'appliqueront aux cas de rugosités relatives plutôt faibles ( $\varepsilon/d < 0,1$ ). Pour les situations de rugosité relative plus importante, une analyse plus poussée du profil de vitesse est nécessaire.

Les propriétés du fluide sont quant à elles représentées dans la grandeur de  $f$  par le bras du nombre de Reynolds. Notons que puisque  $Re$  dépend de la vitesse, son influence sur  $f$  aura comme conséquence que les pertes linéaires ne varieront pas comme  $\bar{v}^2$  en général.

MATÉRIAU	Rugosité (mm)
Béton	0,3 – 3,0
Fer forgé	0,03 – 0,15
Acier galvanisé	0,06 – 0,3
Acier enduit	0,03 – 0,15
Foie	0,15 – 0,6
Asphalte centrifugé	0,3
PVC	0,015
Vitre, plastique	lisse

**Tableau 6.1** Rugosité pour certains matériaux. Ces valeurs ne servent qu'à titre indicatif. L'usure, par exemple, peut les modifier de façon appréciable.

## 6.5 Les pertes de charge linéaires $h_L$

### 6.5.1 Les pertes linéaires dans les écoulements laminaires en conduite

En situation d'écoulement laminaire, on peut utiliser la loi de Newton et égauxer les équations (6-10) et (6-11).

$$\tau = \mu \frac{dv}{dr} = \frac{\Delta P'}{2L} r$$

Alors 
$$dv = \frac{\Delta P'}{2\mu L} r \, dr$$

$$v = \int \frac{\Delta P'}{2\mu L} r \, dr + C = \frac{\Delta P'}{2\mu L} \int r \, dr + C$$

$$v = \frac{\Delta P'}{4\mu L} r^2 + C$$

ou  $C$  est une constante d'intégration à déterminer. Puisque la vitesse s'annule à la paroi, pour une conduite de rayon  $R$  on pose

$$v(r=R) = 0 = \frac{\Delta P'}{4\mu L} R^2 + C$$

d'où 
$$C = -\frac{\Delta P' R^2}{4\mu L}$$

En conséquence, 
$$v(r) = \frac{\Delta P' R}{4\mu L} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad (6-13)$$

ou encore :

$$v(r) = v_z \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (6-14)$$

avec

$$v_z = \frac{\Delta P R}{4\mu L} \quad (6-15)$$

On remarque que le profil de vitesse est parabolique et de vitesse au centre  $v_z$ . Utilisant les résultats de l'exemple 6.2 (avec  $n = 2$ ), on trouve pour la vitesse moyenne, le débit volumique et le coefficient de correction  $\alpha$ .

$$\bar{v} = \frac{v_z}{2} = \frac{\Delta P R^2}{8\mu L} \quad (6-16)$$

$$Q = vA = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\mu L} \quad (6-17)$$

$$\alpha = 2 \quad (6-18)$$

Le résultat (6-17) appelé équation d'Hagen-Poiseuille conduit à l'expression pour les pertes en situation d'écoulement laminaire. Puisque

$$\Delta P = \frac{8\mu L Q}{\pi R^4}$$

et que

$$h_L = \frac{\Delta P}{\rho g}$$

il vient en posant  $R = \frac{d}{2}$

$$h_L = \frac{128\mu L}{\pi \rho g d^4} Q$$

Utilisant la viscosité cinématique et le fait que  $Q = \bar{v}A$  on peut aussi écrire

$$h_L = \frac{128\mu L}{\pi \rho g d^4} Q = \frac{32}{g d^5} \frac{L}{\tau} \bar{v} \quad (6-19)$$

On constate que les pertes de charge sont proportionnelles à la vitesse moyenne ainsi qu'à la viscosité. Notons comment l'effet de la proximité de la paroi se fait fortement sentir. En effet, diminuer le diamètre de la conduite par un facteur 2 multiplie les pertes par 4. Toutefois, et ça peut surprendre, la rugosité n'intervient en aucune façon dans la grandeur de  $h_L$ .

On sait qu'on peut toujours utiliser l'équation de Darcy-Weisbach (équation (6-12)) pour évaluer les pertes linéaires. Il faut seulement établir ce que vaut le coefficient de friction  $f$  dans ce cas. On doit donc avoir

$$h_L = f \frac{L}{d} \frac{v}{2g} = \frac{32}{g d^5} \frac{L}{\tau} \bar{v}$$

On trouve donc :

$$f = \frac{64\nu}{\bar{v}d}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f = \frac{64}{\text{Re}}} \quad (6-20)$$

L'emploi de (6-19) ou bien de (6-12) conjointement avec (6-20) est indifférent, comme l'indique le traitement qui précède. Il ne s'agit ici que de question de goût.

**Exemple 6.3** De la glycérine de viscosité cinématique  $\nu = 0.001 \text{ m}^2/\text{s}$  et de masse volumique  $1300 \text{ kg}/\text{m}^3$  s'écoule à travers une conduite horizontale de 10 cm de diamètre à la vitesse moyenne de  $30 \text{ cm}/\text{s}$ . De combien chute la pression sur la distance de  $1 \text{ m}$ ? De  $2,5 \text{ m}$ ?

*Solution*

Si on écrit l'équation d'énergie entre les deux points sachant qu'il n'y a pas de pompe ni de turbine,

$$H_1 = H_2 + h_{1-2}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\bar{v}_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + z_2 + h_{1-2}$$

La conduite est horizontale et de section constante alors

$$z_1 = z_2 \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{avec} \quad \bar{v}_1 = \bar{v}_2$$

Alors

$$\frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} + h_{1-2}$$

donc :

$$P_1 - P_2 = \rho g h_{1-2}$$

On observe qu'il s'agit d'un écoulement laminaire

$$\text{Re} = \frac{\bar{v}d}{\nu} = \frac{0,3 \times 0,1}{0,001} = 30$$

Les pertes de charge sont des pertes linéaires donc pour  $L = 1 \text{ m}$ ,

$$h_{1-2} = h_L = \frac{32\nu L}{g d^3 \bar{v}} = \frac{32 \times 0,001 \times (1)}{9,81 \times (0,1)^3} \times (0,3) = 0,098 \text{ m}$$

On aurait pu utiliser l'équation de Darcy-Weisbach. Alors

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{64}{30} = 2,1\bar{3} \quad h_L = f \frac{L}{d} \frac{V^2}{2g} = 2,1\bar{3} \frac{1}{0,1} \frac{0,3^2}{2 \times 9,81} = 0,008 \text{ m}$$

Donc  $P_1 - P_2 = \rho g h_L = 1300 \times 9,81 \times 0,008 = 1248 \text{ Pa}$

Si  $L = 2,5 \text{ m}$

$h_L \propto L$  alors si la longueur est multipliée par un facteur 2,5, il en sera de même des pertes linéaires et donc de la pression.

$$P_1 - P_2 = 2,5 \times 1248 = 3120 \text{ Pa}$$

### 6.5.2 Les pertes linéaires dans les écoulements turbulents en conduite

La turbulence est caractérisée par un mélange intense de la matière qui s'accompagne le plus souvent de tourbillons longitudinaux ou transversaux. L'énergie nécessaire à l'entretien de ces tourbillons doit provenir de l'écoulement. De plus, nous l'avons mentionné, ce mélange conduit à des contraintes de cisaillement qui ne peuvent être calculées à l'aide de la loi de Newton (équation 6-11). Ce fait constitue une différence fondamentale entre le traitement des écoulements laminaires et celui des écoulements turbulents et est une des raisons pour lesquelles on se soit tourné vers un traitement empirique pour décrire le phénomène.

La pratique en ingénierie veut qu'on fasse usage de l'équation de Darcy-Weisbach pour évaluer les pertes linéaires.

$$h_L = f \frac{L}{d} \frac{V^2}{2g}$$

Comme il a déjà été mentionné, la difficulté réside dans la détermination du coefficient de friction  $f$ . Beaucoup d'efforts ont été consentis depuis le milieu du XIX<sup>e</sup> siècle afin de caractériser de façon empirique les écoulements et plus particulièrement les écoulements turbulents (l'équation de Darcy-Weisbach date de cette période). Plusieurs formulations plus ou moins heureuses ont été proposées pour évaluer  $f$  suite aux travaux de Nikuradse qui ont eu lieu à l'époque (1933). Colebrook et White ont développé en 1939 une formulation mathématique qui est encore employée aujourd'hui. Ces derniers ont proposé la formule suivante (appelée formule de Colebrook) afin de calculer  $f$ .

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2,0 \log \left[ \frac{\varepsilon/d}{3,7} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right] \quad (6-21)$$

Notons que l'équation (6-21) est implicite en  $f$  ( $f$  ne peut être isolé). Sa résolution pour  $f$  doit donc passer par l'emploi de méthodes numériques. À l'époque, plusieurs approximations de (6-21) ont été développées pour contourner cette difficulté mais la prévalence aujourd'hui des calculateurs symboliques a désormais rendu ces procédés désuets. L'analyse du comportement de  $f$  prédit par

6-21) n'est pas simple a priori. Le diagramme de Moody reproduit à la figure 6.7 permet toutefois de se faire une idée générale.

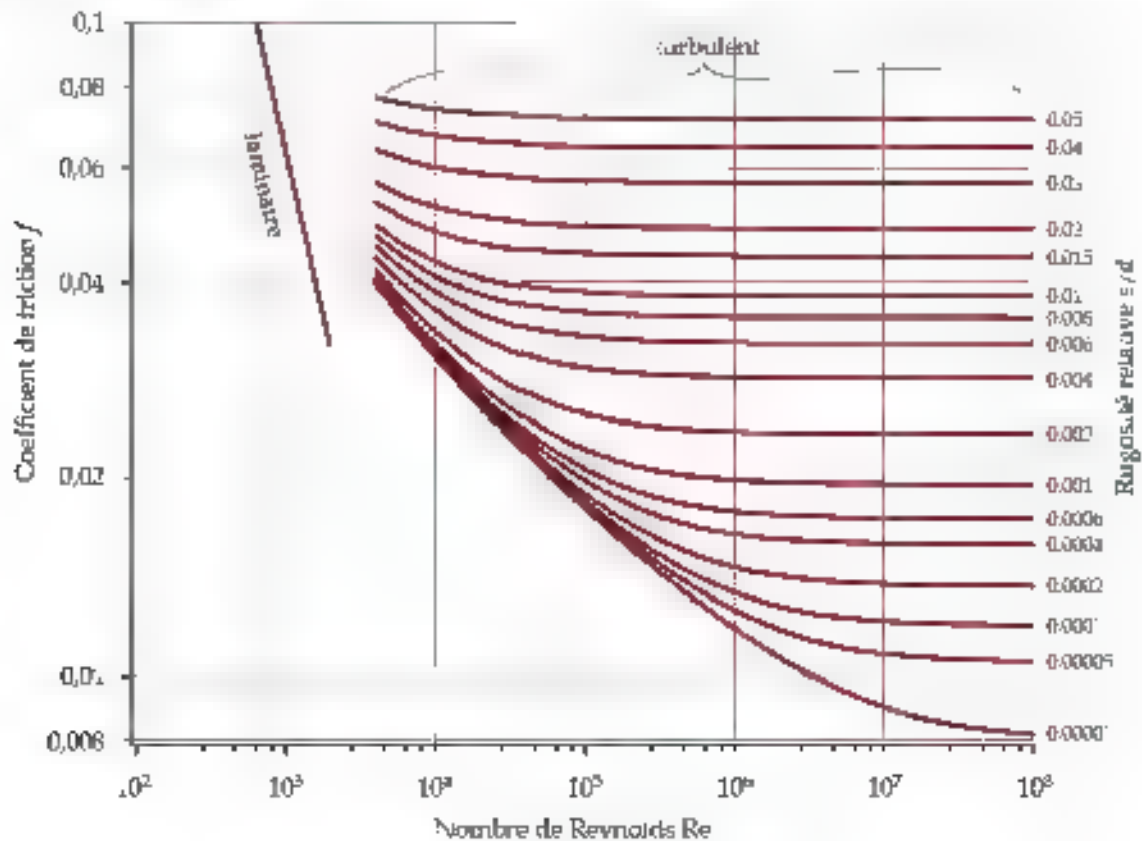


Figure 6.7 Diagramme de Moody

D'emblée, remarquons que la droite de pente -1 représente la relation de l'équation (6-20) pour les écoulements laminaires. Les autres courbes montrent comment varie  $f$  en fonction du nombre Reynolds pour différentes valeurs de la rugosité relative. On observe que pour toutes ces courbes, le coefficient de frottement devient indépendant du nombre de Reynolds pour des valeurs suffisamment grandes de  $Re$  (la courbe devient horizontale). A partir de ces valeurs de  $Re$ , on constate que la seule grandeur qui affecte  $f$  est la rugosité relative. En effet si on fait tendre  $Re$  vers l'infini dans (6-20) on est conduit à la formule de Von Karman qui exhibe le comportement que nous venons de décrire.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,0 \log \frac{\epsilon/d}{3,7}$$

#### Profil de vitesse en situation d'écoulement turbulent

Le mélange caractéristique de la turbulence a tendance à homogénéiser les propriétés de l'écoulement à travers la section de passage. Il en va de même, à une distinction importante près, de la vitesse d'écoulement. La condition de non-glissement impose que la vitesse s'annule à la paroi mais la turbulence a tendance à uniformiser à travers la conduite. On est donc conduit à un profil de vitesse qui présente l'allure illustrée à la figure 6.8



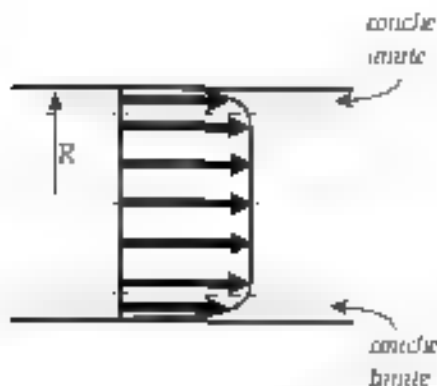


Figure 6.8 Écoulement turbulent : profil de vitesse et couche limite

La vitesse est essentiellement uniforme sur la part la plus importante de la section de passage. Toutefois, dans une région très mince appelée couche limite elle varie très rapidement pour devenir zéro à la paroi. Plusieurs modélisations mathématiques de ce phénomène ont été proposées. Dans le cadre de ce texte, toutefois, nous négligerons l'effet de la couche limite pour les besoins de nos calculs et considérerons que l'écoulement est uniforme. En conséquence, il vient

$$u = v \quad (6-22)$$

et 
$$\alpha = 1 \quad (6-23)$$

**Exemple 6.4** Le réservoir de la figure 6.9 se vide à travers la conduite de 10 cm de diamètre et de rugosité  $\varepsilon = 0,2$  mm. Le fluide en écoulement est de l'eau à 20 °C qui débouche à l'atmosphère avec un débit de 0,05 m<sup>3</sup>/s. Calculez la hauteur  $h$  de l'eau dans le réservoir.

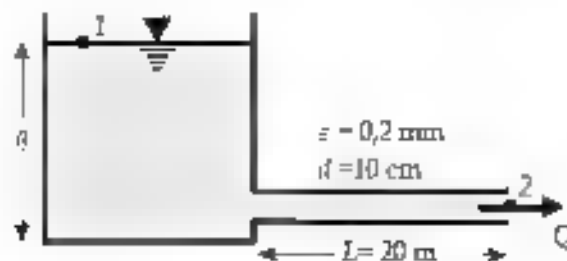


Figure 6.9 Exemple 6.4

*Solution*

Notons que pour de l'eau à 20 °C  $\rho = 998$  kg/m<sup>3</sup> et  $\nu = 1 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s

Équation d'énergie

$$H_1 = H_2 + h_L$$

$$z_1 + \sigma = z_2 + \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + h_L$$

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = 6,366 \text{ m/s}$$

et

$$Re = \frac{\bar{v} d}{\nu} = 636620 \quad (\text{turbulent, alors } \alpha_v = 1)$$

or

$$h_L = f \frac{L}{d} \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

avec

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,0 \log \left\{ \frac{\varepsilon/d}{3,7} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right\}$$

Après avoir introduit les valeurs pour  $\varepsilon/d$  et  $Re$  dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,0 \log \left\{ 0,000540 + \frac{1,97135 \times 10^{-5}}{\sqrt{f}} \right\}$$

alors, résolvant pour  $f$ :

$$f = 0,0237 \quad \text{et} \quad h_L = \frac{L}{d} \frac{\bar{v}^2}{2g} = 9,796 \text{ m}$$

donc

$$s = \frac{\bar{v}^2}{2g} + h_L = \frac{(6,366)^2}{2 \times 9,81} + 10,235 = 11,86 \text{ m}$$

### 6.5.3 Résumé des résultats des sections 6.5.1 et 6.5.2

#### Écoulements laminaires

$$h_L = \frac{128 \mu L}{\pi \rho g d^4} Q = \frac{32 \mu L}{g d^4} v$$

ou encore

$$h_L = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} \quad \text{avec} \quad f = \frac{64}{Re}$$

$$v(r) = v_{\max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

alors

$$\bar{v} = \frac{v_{\max}}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_v = 2$$

#### Écoulements turbulents

$$h_L = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\sqrt{f}} = 2,0 \log \left\{ \frac{\varepsilon/d}{3,7} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right\}$$

$$v(r) = v_{\max}$$

alors

$$v = \bar{v} \quad \text{et} \quad \alpha_v = 1$$

## 6.6 Pertes singulières

Tous les systèmes de tuyauterie comportent des éléments comme des coudes, des valves ou des entrées et sorties qui perturbent l'écoulement (les lignes de courant) et peuvent introduire de la turbulence locale. La figure ci-dessous illustre comment sont affectées les lignes de courant et comment est produite de la turbulence lors d'un changement subit de la section d'une conduite.

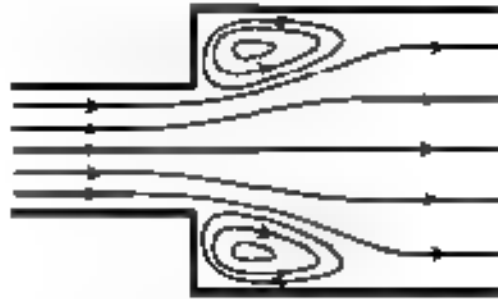


Figure 6.10 Génération de turbulence à une singularité

Ce phénomène retire de l'énergie de l'écoulement, quand bien même ce ne serait que l'énergie cinétique nécessaire au maintien du tourbillon. La présence de ces éléments contribuera donc au terme de pertes  $h_s$ . Ces pertes, dites *pertes singulières*, dépendent du débit et de la façon que l'écoulement est dévié, c'est-à-dire de l'élément perturbateur appelé singularité. L'expérience montre que souvent ces pertes sont proportionnelles au carré de la vitesse et donc qu'on peut écrire

$$h_s = K \frac{V^2}{2g} \quad (6-24)$$

où  $h_s$  désigne la perte de charge associée à la singularité de coefficient  $K$ . Au sens strict  $K$  peut dépendre du débit et de la vitesse moyenne, donc mais nous le considérerons ici constant. Sa grandeur dépend évidemment de la singularité elle-même et il est très difficile de faire des prédictions quant à celle-ci : un robinet complètement ouvert, par exemple, ne se comportera pas de la même façon qu'ouvert à moitié. À un robinet fermé on associera un coefficient de singularité infini. Si l'entrée et la sortie de la singularité présentent des sections différentes (donc des vitesses moyennes différentes), nous conviendrons que nous utiliserons la vitesse moyenne à l'entrée aux fins de l'emploi de (6-24). L'entrée d'un réservoir constituera, cela va de soi, l'exception. Le tableau 6.2 présente des valeurs représentatives de  $K$  pour différentes singularités. Comme il a été mentionné, ces coefficients peuvent varier de façon appréciable d'une situation à l'autre. Nous conviendrons que dans le contexte d'un problème donné, les valeurs des coefficients seront spécifiées à moins que le propos du problème soit d'en déterminer la grandeur (voyez l'exemple 6.5).

Singularité	Coefficient de singularité, $K$
Valve à barrière*	0,25
Valve à globe*	10
Valve sphérique*	0,1
Entrée encastrée	0,9
Entrée à arêtes vives	0,4
Entrée profilée	0,35
Coude 90°	0,7
Coude 45°	0,4
Sortie	1,0
Angles 90°	1,1

\* Complètement ouverte

Tableau 6.2 Exemples de coefficients de singularité

**Exemple 6.5** Un tuyau comporte une valve de coefficient de singularité  $K = 6$ . De combien chute la pression entre l'entrée et la sortie de la valve si l'écoulement d'eau ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) se fait à la vitesse de  $1,5 \text{ m/s}$ ?

*Solution*

Équation d'énergie :  $H_1 = H_2 + h_L$ .

Les points 1 et 2 sont à la même élévation et présentent la même vitesse moyenne alors

$$\frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} + h_L,$$

Les points se trouvant immédiatement avant et après la valve,  $h_{L1} = 0$  et  $h_{L2} = h_L$  ainsi

$$P_1 - P_2 = \rho g h_L$$

Or 
$$h_L = K \frac{\bar{v}^2}{2g} = 6 \frac{1,5^2}{2 \times 9,81} = 0,6881 \text{ m}$$

Et 
$$P_1 - P_2 = \rho g h_L = 6750 \text{ Pa}$$

Souvent, plusieurs singularités vont occasionner des pertes entre les points considérés. De façon générale, alors, on aura

$$h_{ST} = \sum_i h_{Si} \quad (6-25)$$

où  $h_{ST}$  désigne les pertes totales de singularité et  $h_{Si}$  les pertes de charge associées à la  $i^{\text{ème}}$  singularité. Toutefois, si le diamètre de la conduite ne varie pas entre les deux points et qu'en conséquence la vitesse moyenne reste constante, le résultat (6-25) devient

$$h_{ST} = \sum_i h_{Si} = \sum_i K \frac{\bar{v}^2}{2g} = K_T \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad (6-26)$$

où :

$$K_T = \sum K \quad (6-27)$$

Si entre les points considérés, des pertes linéaires et des pertes singulières affectent la hauteur de charge, les pertes totales  $h_{1-2}$  seront données par (6-5).

alors :

$$h_{1-2} = \sum h$$

$$h_{1-2} = \sum h_L + \sum h_S$$

où  $h_L$  désigne les pertes de charge associées à la  $i^{\text{ème}}$  conduite et  $h_S$  désigne les pertes de charge associées à la  $j^{\text{ème}}$  singularité

**Exemple 6.6** De l'eau à 10 °C s'écoule entre deux réservoirs à travers une conduite d'acier ( $\varepsilon = 0,2 \text{ mm}$ ) de 40 mm de diamètre et de longueur totale  $L=20 \text{ m}$ . Les 6 coudes présentent un coefficient de singularité de 1,2 chacun tandis que l'entrée et la sortie ont des coefficients respectifs de 1 et 0,5. Calculez le débit volumique et établissez la puissance dissipée sous formes de pertes.

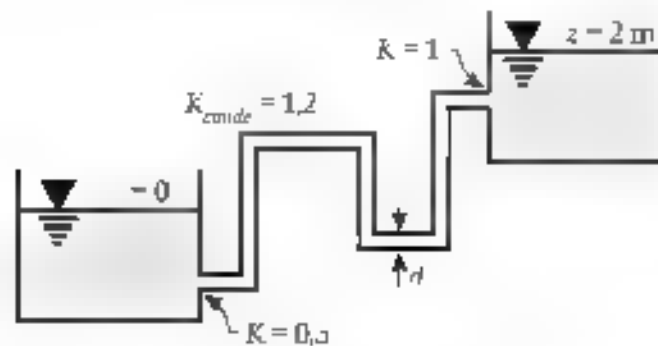


Figure 6.11 Exemple 6.5

*Solution*

Pour de l'eau à 10 °C  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  et  $\mu = 1,31 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ . Prenant le sommet du réservoir le plus élevé comme point 1 et le haut de l'autre réservoir comme point 2

où :

$$H_1 = H_2 + h_L$$

$$H_1 = H_2 + h_{1-2} \text{ et } h_{1-2} = h_L + h_S$$

alors :

$$z_1 = z_2 + h_L + h_S \quad (F.6.5-1)$$

$$2 = h_L + h_S$$

Comme la vitesse moyenne n'est pas connue (on cherche le débit), on ne sait pas d'emblée si l'écoulement est laminaire ou turbulent. Il faudra fonctionner par hypothèse. Le nombre de Reynolds s'écrit

$$Re = \frac{\bar{v} d}{\nu} = 30534,4 \bar{v} \quad (E\ 6.6-2)$$

Ainsi, pour que l'écoulement soit laminaire ( $Re < 2000$ ) il faut que la vitesse moyenne soit inférieure à 1/15 m/s. On s'attend donc plutôt, à un écoulement turbulent. Faisons abstraction de ce fait et faisons l'hypothèse d'un écoulement laminaire.

*Hypothèse écoulement laminaire*

Donc :

$$h_L = \frac{32 \nu l}{g d^3} \bar{v} = 0,0534 \bar{v} \quad (E\ 6.6-3)$$

Par ailleurs

$$\kappa_\tau = K_\tau \frac{\bar{v}^2}{2g} = 6 * 1,2 + 1 + 0,5 \left( \frac{\bar{v}}{2 * 9,81} \right)^2 = 0,4434 \bar{v}^2 \quad (E\ 6.6-4)$$

Insérant ((E 6.6-3) et (E 6.6-4) dans (E 6.6-1), on trouve

$$2 = 0,0534 \bar{v} + 0,4434 \bar{v}^2$$

ou encore

$$0,4434 \bar{v}^2 + 0,0534 \bar{v} - 2 = 0 \quad (E\ 6.6-5)$$

c'est-à-dire une forme quadratique en  $\bar{v}$ . On sait résoudre ce genre d'équation. Il vient

$$\bar{v} = 2,185 \quad \text{ou} \quad 2,064 \text{ m/s}$$

$\bar{v}$  représente la grandeur de la vitesse moyenne et ne peut donc être négative.

Alors,  $\bar{v} = 2,064 \text{ m/s}$  et  $Re = 63023 > 2000$ .

L'écoulement n'est donc pas laminaire et l'hypothèse doit être rejetée.

*Écoulement turbulent*

$$\kappa_L = f \frac{L}{d} \frac{\bar{v}^2}{2g} = 25,48 f \bar{v}^2 \quad (E\ 6.6-6)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,0 \log \left| \frac{e}{3,7d} + \frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right| \quad (E\ 6.6-7)$$

Insérant ((E 6.6-4) et (E 6.6-6) dans (E 6.6-1), on trouve

$$2 = f \frac{L}{d} \frac{\bar{v}^2}{2g} + K_\tau \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

$$2 = 25,45 f + 0,4434 \bar{v}^2$$

c'est-à-dire :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2}{25,45 f + 0,4434}} \quad (\text{E 6.6-8})$$

On remarque que à l'opposé de précédemment on ne peut résoudre immédiatement pour  $\bar{v}$ . En effet,  $f$  nécessite pour sa détermination la grandeur de  $Re$  qui lui-même dépend de la vitesse moyenne. On se construit donc une expression de  $Re$  fonction de  $f$ .

$$Re = 30534,4 \bar{v} = 30534,4 \sqrt{\frac{2}{25,45 f + 0,4434}}$$

Ce dernier résultat peut maintenant être introduit dans la formule de Colebrooke ((E 6.6-7)).

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{0,02}{3,7 \times 40} + \frac{2,51}{30534,4 \sqrt{\frac{2}{25,45 f + 0,4434}}} \right)$$

Cette équation ne dépend plus que de  $f$  elle peut être résolue. On trouve

Alors  $f = 0,0327$   
 $\bar{v} = 1,252 \text{ m/s}$

L'écoulement est bien turbulent  $Re = 38224 > 4000$

Finalement :  $Q = \bar{v}A = 0,00157 \text{ m}^3/\text{s}$

La puissance est dissipée sous forme de pertes,

$$W_{\text{pertes}} = \rho g Q h_{T-2} = \rho g (h_L + h_s)$$

$$h_L = 25,48 \bar{v}^2 = 1,305 \text{ m} \quad h_s = 0,4434 \bar{v}^2 = 0,695 \text{ m}$$

alors :  $W_{\text{pertes}} = \rho g Q (h_L + h_s) = 30,8 \text{ W}$

#### Remarques finales sur l'exemple 6.6

Souvent, le problème à résoudre consiste à déterminer la vitesse moyenne. Les démarches employées dans le cadre de la solution de cet exemple sont-elles représentatives? Remarquons un fait, d'abord. En absence de pompe ou de turbine, l'équation d'énergie (6-4), s'écrit

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\bar{v}_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + z_2 + h_L + h_s$$

Notons que pour ce type de problème tout est connu à l'exception des différentes vitesses. Ces dernières peuvent toutes être exprimées en termes de  $\bar{v}$  ou de celles-ci, disons  $\bar{v}_1$ . Alors la forme la plus générale que prend l'équation d'énergie dans ces circonstances est la suivante

$$C_1 + C_2 \bar{v}_1^2 + h_L = 0 \quad (6-28)$$

où  $C_1$  regroupe tous les termes constants, c'est-à-dire  $\frac{P_1}{\rho g}$ ,  $\frac{P_2}{\rho g}$ ,  $z_1$  et  $z_2$ .

et  $C_2$  est le facteur qui accompagne les différents termes proportionnels aux différentes vitesses

toutes exprimées en fonction de  $\bar{v}_1$ , à savoir  $\bar{v}_1 = \bar{v}_1$ ,  $\bar{v}_2 = \bar{v}_1$  et  $h_L = K_T \frac{\bar{v}_1^2}{2g}$

L'équation (6-28) prendra deux formes selon que l'écoulement est laminaire ou turbulent

### 1) Écoulement laminaire

alors :  $h_L = \frac{32\mu L}{gd^2} \bar{v}_1 = C_3 \bar{v}_1$

et l'équation (6-28) devient :  $C_1 + C_2 \bar{v}_1^2 + C_3 \bar{v}_1 = 0$

On est donc en présence d'une équation quadratique en  $\bar{v}_1$  comme ça été le cas de l'équation (E 6.6-5).

### 2) Écoulement turbulent

alors :  $h_L = f \frac{L}{d} \frac{\bar{v}_1^2}{2g} = C_4 f \bar{v}_1^2$

et l'équation (6-28) devient :  $C_1 + C_2 \bar{v}_1^2 + f C_4 \bar{v}_1^2 = C_1 + C_2 + f C_4 \bar{v}_1^2 = 0$

ou encore :  $\bar{v}_1 = \sqrt{\frac{C_1}{C_2 + f C_4}}$

c'est-à-dire la forme de l'équation (E 6.6-8) de l'exemple précédent.

En conclusion, on peut affirmer que les démarches utilisées à l'exemple 6.6 sont tout à fait représentatives de ce qu'il faudrait faire afin de résoudre un problème de ce type et la solution présentée peut servir de guide général.



## 6.7 EXERCICES

**Problème 1** La seringue de la figure P 6.1 contient de l'eau à 20 °C et est munie d'un piston qui est déplacé à la vitesse de 1 cm/s. Négligeant les pertes occasionnées par la construction, calculez la chute de pression ( $P_1 - P_2$ ). Considérez l'écoulement complètement développé en 1 et 2.

$$\text{Rép. } (P_1 - P_2) = 951,2 \text{ Pa}$$

**Problème 2** Une huile de lubrification est en écoulement comme le montre la figure P 6.2. La conduite à travers laquelle s'effectue l'écoulement a un diamètre de 1,0 cm et une longueur de 1,2 m. La viscosité cinématique est de  $1,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ . Trouvez le débit dans la conduite.

$$\text{Rép. } Q = 3,845 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

**Problème 3** Du kérosène à 20 °C est en écoulement dans une conduite inclinée vers le bas à un angle de 10° par rapport à l'horizontale. La pression dans la conduite chute de 20 Pa sur une longueur de 1 m et un débit de 1,0 L/min. Trouvez le diamètre interne de la conduite.

$$\text{Rép. } d = 5,52 \text{ mm}$$

**Problème 4** Le dispositif de la figure P 6.4 est constitué de deux conduites de 5 cm de diamètre et de longueurs  $L_1$  et  $L_2$  séparées par une valve. Entre les points A et B, la pression chute de 91,303 kPa et le débit d'eau à 10 °C est de  $0,008 \text{ m}^3/\text{s}$ .

- Établissez la grandeur totale des pertes.
- Calculez les pertes linéaires dans chacune des conduites.
- Établissez le coefficient de singularité  $K$  de la valve.

$$\text{Rép. a) } h = 9,307 \text{ m}$$

$$\text{b) } h_{L1} = 1,015 \text{ m; } h_{L2} = 1,523 \text{ m}$$

$$\text{c) } K = 8$$

**Problème 5** De l'eau à  $90^\circ\text{C}$  s'écoulant à partir d'un réservoir à travers une conduite en acier de rugosité  $\varepsilon = 0,046\text{ mm}$  (figure P 6.5). Négligeant les pertes à l'entrée et à la sortie de la conduite, calculez le débit  $Q$ .

Rép.  $Q = 9,05 \times 10^{-6}\text{ m}^3/\text{s}$ .

**Problème 6** Le fluide de la figure P 6.3 a été changé. Il présente une masse volumique de  $998\text{ kg/m}^3$  mais on ne connaît pas sa viscosité. Sachant que l'écoulement est laminaire et que le débit est de  $5,10 \times 10^{-6}\text{ m}^3/\text{s}$ , établissez la viscosité cinématique.

Rép.  $\nu = 4,78 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$

**Problème 7** Un fluide s'écoule à travers deux conduites de même longueur  $L$  disposées à la suite l'une de l'autre (voyez la figure P 6.7). L'écoulement est laminaire. La chute de pression dans la première conduite de diamètre  $d$  est 1,24 fois plus grande que la chute de pression dans la seconde conduite. Déterminez le diamètre  $D$  de la deuxième conduite.

Rép.  $D = 1,055 d$

**Problème #8** Une huile de densité 0.87 et de viscosité cinématique  $1,2 \times 10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$  est en écoulement à travers une conduite verticale de 20 mm de diamètre (figure P 6.8).

- Sachant que le débit est de  $4 \times 10^{-4}\text{ m}^3/\text{s}$ , déterminez le paramètre  $h$  et  $P_A - P_B$ .
- Si le débit est maintenant de  $2 \times 10^{-4}\text{ m}^3/\text{s}$ , répondez aux questions de a).
- Quel doit être le débit si on veut que les pressions en A et B soient les mêmes?

Rép. a)  $h = 74,06\text{ cm}$ ;  $P_A - P_B = -8,4\text{ kPa}$   
 b)  $h = 17,03\text{ cm}$ ;  $P_A - P_B = +12,87\text{ kPa}$   
 c)  $Q = 3,21 \times 10^{-4}\text{ m}^3/\text{s}$

**Problème 9** De la glycérine à 20 °C est en écoulement à travers une conduite verticale de 10 m de longueur et de 75 mm de diamètre. La vitesse au centre de 1,0 m/s, la viscosité cinématique est de  $10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$  et la masse volumique est de  $1300 \text{ kg}/\text{m}^3$ . Si l'écoulement se fait vers le haut déterminez

- a) la perte de charge dans la conduite.
- b) la chute de pression dans la conduite.

Rép. a)  $h_f = 2,9 \text{ m}$

b)  $\Delta P = 164,0 \text{ kPa}$

**Problème 10** De l'eau à 20 °C est siphonnée d'un bassin d'irrigation vers un autre bassin par le biais d'une conduite de 50 mm de diamètre et de longueur 1,5 m comme l'indique la figure P 6.10. La rugosité absolue de la conduite est de 0,20 mm. Les coefficients de singularité de l'entrée, des coudes ainsi que de la sortie sont spécifiés sur la figure. Déterminez le débit de l'eau dans la conduite.

Rép.  $Q = 1,63 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ .

**Problème 11** La figure P 6.11 montre une turbine alimentée en eau par un bassin disposé 27 m plus haut. La conduite d'amenée d'eau d'un diamètre de 30,5 cm et d'une longueur de 91,5 m présente un coefficient de friction de 0,02. Si la turbine extrait 37,5 kW de l'écoulement, calculez le débit.

Rép.  $Q = 0,55 \text{ m}^3/\text{s}$  ou  $Q = 0,15 \text{ m}^3/\text{s}$

**Problème 12** De l'eau à 10 °C est en écoulement entre deux réservoirs à travers une conduite de 20 m de longueur totale et de rugosité absolue  $\varepsilon = 0,26 \text{ mm}$  (figure P 6.12). Le débit d'eau est de  $0,002 \text{ m}^3/\text{s}$ . Le système comporte 6 coudes de coefficient 1,5, chacun. Déterminez le diamètre de la conduite.

Rép.  $d = 45 \text{ mm}$

**Problème 13** Deux réservoirs d'eau à 20 °C sont reués par une conduite d'acier galvanisé de 21 m. Le réservoir du haut est ouvert à l'atmosphère et celui du bas est soumis à une pression relative de 70 kPa (voyez la figure P 6.13). On néglige les pertes de singularité. Déterminez le sens de l'écoulement et calculez le débit volumique.

$$\text{Rép. : de B vers A et } Q = 1,53 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}.$$

**Problème 14** La pression  $P_A$  du réservoir de la figure P 6.14 est requise afin de maintenir un débit de  $0,14 \text{ m}^3/\text{s}$  à travers la conduite de 200 mm de diamètre. Le fluide est de l'eau à 10 °C. La conduite est en fonte ( $\varepsilon = 0,26 \text{ mm}$ ) et la sortie se effectue à l'air libre.

a) Calculez  $P_A$ .

b) Calculez la pression au point B, situé immédiatement après le coude.

$$\text{Rép. a) } P_A = 1,423 \text{ MPa}$$

$$\text{b) } P_B = 211,73 \text{ kPa}$$

**Problème 15** La pompe  $P$  de la figure P 6.15 fournit une puissance de 50 kW causant ainsi un écoulement de  $0,04 \text{ m}^3/\text{s}$ . Calculez le nouveau débit si la pompe est retirée du système. Considérez que le coefficient de friction de la conduite est  $f = 0,016$  et que les coefficients de singularité de l'entrée et de la sortie sont respectivement de 0,5 et 1.

$$\text{Rép. : } Q = 0,0151 \text{ m}^3/\text{s}$$

**Problème 16** Lorsque le robinet est fermé, l'eau s'écoule de A vers B tel qu'illustré à la figure 11. Quel est le débit d'eau dans le réservoir B si le robinet est ouvert et l'eau s'écoule aussi vers C? Négligez toutes les pertes de singularité et considérez  $f = 0,02$  pour toutes les conduites.

$$\text{Rép. } Q = 1,8 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

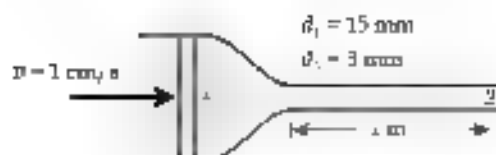


Figure P 6.1

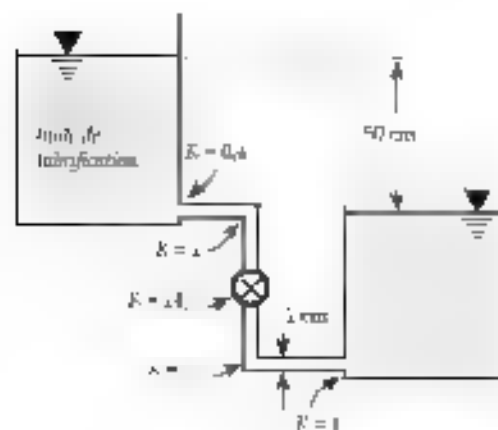


Figure P 6.2

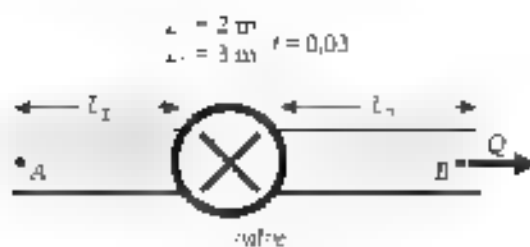


Figure P 6.4

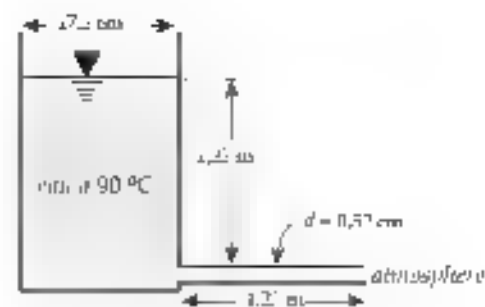


Figure P 6.5

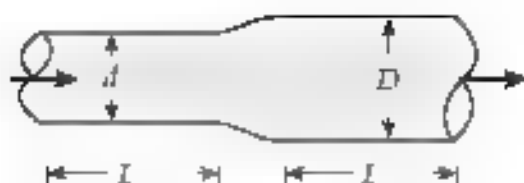


Figure P 6.7

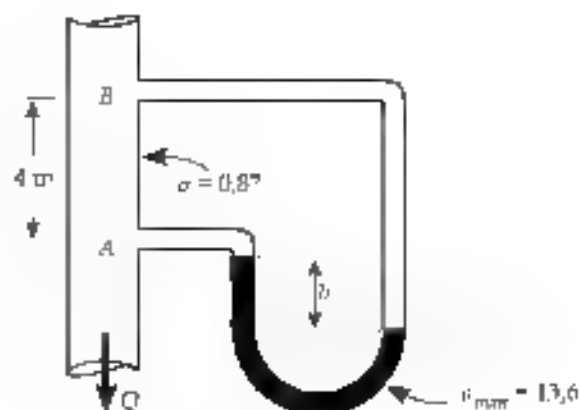


Figure P 6.8

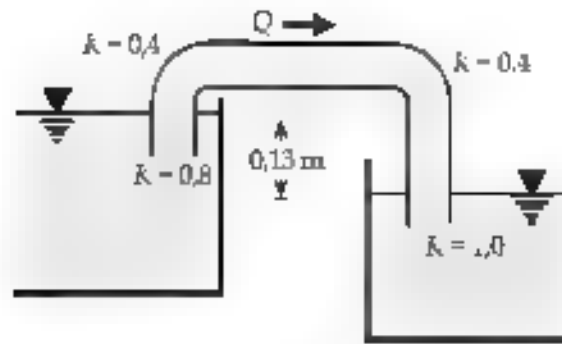


Figure P 6.10

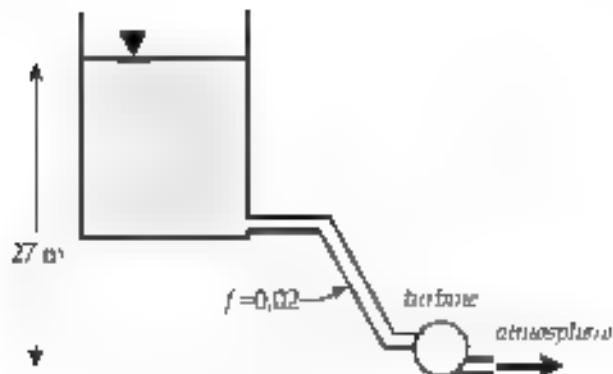


Figure P 6.11

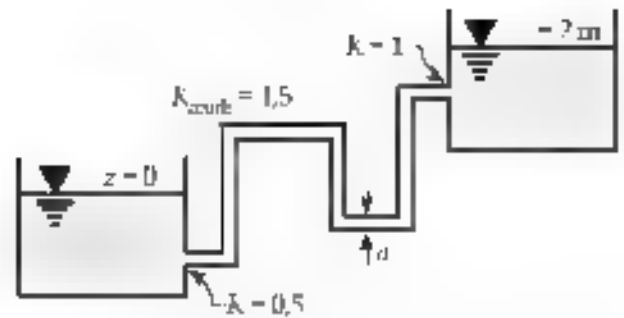


Figure P 6.12

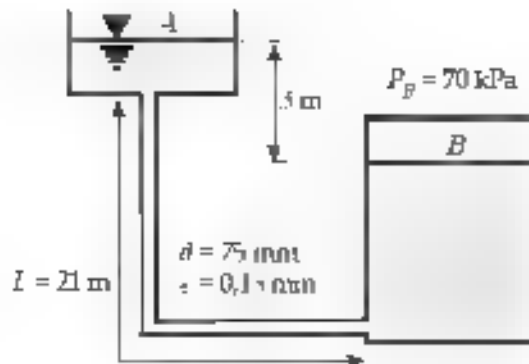


Figure P 6.13

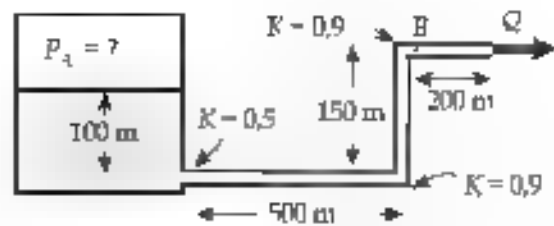


Figure P 6.14

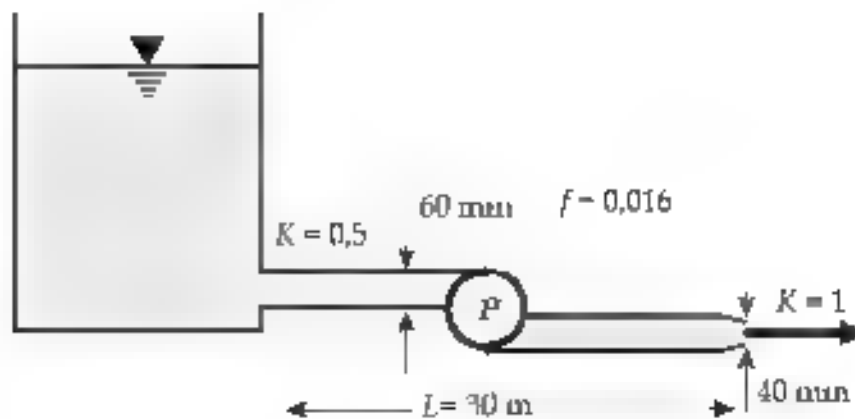


Figure P 6.15

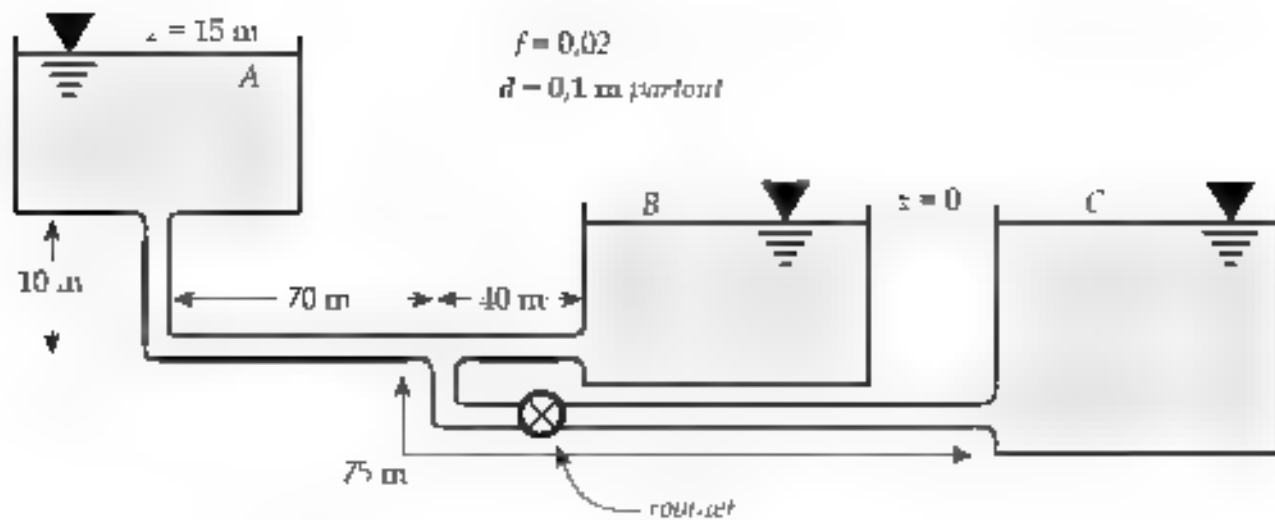


Figure P 6.16





## 6.8 ANNEXE A1 : Analyse dimensionnelle

### 6.8.1 Les bases de l'analyse dimensionnelle

Bien que plusieurs problèmes en mécanique des fluides puissent être résolus de façon analytique à partir de principes physiques de base, il existe un grand nombre de problèmes qui ne peuvent être traités qu'à partir de données expérimentales. Ainsi, les ingénieurs travaillant en mécanique des fluides doivent être familiers avec une approche empirique qui leur permet d'interpréter les données expérimentales et d'en déduire un modèle général. Pour ce faire, l'analyse dimensionnelle se révèle un outil de premier choix. Plusieurs livres ont été publiés uniquement sur ce sujet. Nous nous contenterons ici d'illustrer cette démarche à l'aide d'exemples.

Fondamentalement, l'analyse dimensionnelle est une méthode permettant de réduire le nombre de variables expérimentales dont dépend un phénomène physique quelconque en utilisant une technique de « compactage » des variables expérimentales. Si un phénomène dépend de  $n$  variables, l'analyse dimensionnelle permet de réduire la complexité du problème à  $k$  variables adimensionnelles (sans unité) où la réduction du nombre de variables,  $n - k$ , est généralement égale au nombre d'unités de base nécessaires pour résoudre le problème.

D'un point de vue pratique, le premier avantage de l'analyse dimensionnelle est de réduire sensiblement le nombre de données expérimentales nécessaires pour caractériser un phénomène physique, donc de sauver du temps et de l'argent. Un deuxième avantage de l'analyse dimensionnelle est de fournir une loi d'échelle qui permet de convertir les données obtenues à partir d'une maquette réduite (celle d'un barrage, ou d'un avion) à un prototype réel. Ce deuxième aspect de l'analyse dimensionnelle ne sera pas abordé dans ce texte.

Illustrons la technique de « compactage » des variables expérimentales à l'aide d'un exemple simple. Un problème important en mécanique des fluides est d'exprimer les pertes d'énergie massiques linéaires,  $g_{L_L}$ , en fonction des différents paramètres de l'écoulement. La première étape consiste à énumérer toutes les variables qui sont susceptibles d'affecter ce terme. Typiquement, les variables devraient inclure des paramètres géométriques (diamètre et longueur de la conduite), des paramètres caractérisant les propriétés du fluide (masse volumique, viscosité), ainsi que des paramètres caractérisant la nature de l'écoulement (vitesse de l'écoulement). Ainsi,  $g_{L_L}$ , pour une conduite lisse peut être exprimée comme suit :

$$g_{L_L} = F(d, L, \rho, \mu, U) \quad (A1-6-1)$$

où  $F$  est une fonction quelconque que l'on cherche à déterminer expérimentalement.

La deuxième étape consiste à exprimer chacun des termes ci-dessus en fonction de leur dimension de base. Ainsi,

$$g_{L_L} = L T^{-2}$$

$$d = L$$

$$L = L$$

$$\rho = M L^{-3}$$

$$\mu = ML^{-1}T^{-1}$$

$$\bar{v} = LT^{-1}$$

où  $L$ ,  $M$  et  $T$  représentent respectivement les dimensions d'une longueur, d'une masse et d'un temps.

### 6.8.2 Le théorème pi

Pour une équation physique quelconque impliquant  $n$  variables telles que

$$u_1 = F(u_2, u_3, \dots, u_r)$$

le théorème  $\pi$  stipule que les termes de cette équation peuvent être réarrangés de telle sorte que

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-k}) \quad (A1-6-7)$$

où les termes  $\pi$  sont des combinaisons adimensionnelles des variables de base  $u_i$ . Le nombre de termes  $\pi$  correspond au nombre de variables initiales,  $n$ , moins le nombre de dimensions nécessaires pour décrire ces variables,  $k$ . Si on reprend l'exemple de la section précédente,  $n = 6$  et  $k = 3$ . La troisième étape de l'analyse dimensionnelle consiste à déterminer le nombre de termes  $\pi$  nécessaires. Ainsi, pour l'équation (A1-6-1) on a  $n = 6$  et  $k = 3$ . On obtient donc

$$\pi = 6 - 3 = 3$$

où  $\Phi$  encore une fois est une fonction quelconque. La quatrième étape consiste à choisir parmi les variables de base, un nombre  $r$  de variables répétitives. Ces variables sont choisies de telle sorte qu'elles soient dimensionnellement indépendantes les unes des autres (i.e. les dimensions d'une variable répétitive ne peuvent être obtenues par une combinaison de produits de puissances des autres variables répétitives). Pour des raisons pratiques, la variable dont on veut décrire le comportement  $g(u_1)$  ne sera pas choisie comme variable répétitive. Utilisons la notation  $r$  pour d'écrire les variables répétitives et  $y$  pour les variables restantes. Si on choisit  $d$ ,  $\mu$ , et  $\bar{v}$  comme variables répétitives on peut écrire

$$x_1 = d, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \bar{v}, \quad y_1 = g/h_c, \quad y_2 = l, \quad y_3 = \rho$$

La cinquième étape consiste à construire les termes  $\pi_i$  en multipliant une des variables non répétitives par le produit de puissance des variables répétitives, tel que

$$\pi_i = y_1^a y_2^b y_3^c$$

où les exposants  $a$ ,  $b$ , et  $c$  sont déterminés de telle sorte que les termes  $\pi$  soient sans dimension. Calculons ces termes pour l'exemple courant

$$\pi = g u_1 d^a \mu^b \bar{v}^c$$

En analysant les dimensions de ce terme on obtient

$$\begin{aligned}\pi &= L^a T^{-a} L^b M^c L^{-b} T^{-b} L^{-c} T^c \\ &= L^{a-b+c} M^c T^{-a-b+c}\end{aligned}$$

Puisque l'exposant de chaque unité de base doit égaier zéro, on obtient le système d'équation suivant

$$\begin{aligned}2 + a - b + c &= 0 \\ b &= 0 \\ c - b - c &= 0\end{aligned}$$

La solution de ce système algébrique est donnée par  $a=0$ ,  $b=0$  et  $c=-2$ . Il en résulte que

$$\pi_1 = \frac{gh_L}{\bar{v}^2}$$

En répétant ce procédé pour les variables  $L$  et  $\mu$  on obtient les termes  $\pi^j$  suivants

$$\pi_2 = \frac{L}{d}, \quad \pi_3 = \frac{\rho \bar{v} d}{\mu} = \text{Re}$$

La dernière étape de l'analyse dimensionnelle consiste à exprimer la forme finale donnée par l'équation (A1-6-2). Ici, on obtient

$$\frac{gh_L}{\bar{v}^2} = \phi \left( \frac{L}{d}, \text{Re} \right) \quad (\text{A1-6-3})$$

### 6.8.3 Applications de l'analyse dimensionnelle

#### Équations de Blasius

En divisant arbitrairement l'équation (A1-6-3) par  $\pi_2$  on obtient

$$\frac{gh_L}{\bar{v}^2} = \eta \left( \frac{L}{d}, \text{Re} \right) \quad (\text{A1-6-4})$$

où  $\eta$  est un multiple de la fonction  $\phi$ . L'équation (A1-6-4) est l'aboutissement de l'analyse dimensionnelle qui ne nous donne aucune information quant à la nature de la fonction  $\eta$ . La détermination de cette fonction relève de l'analyse des données expérimentales pour un problème à trois variables (au lieu de 6 variables, tel que présenté dans l'équation (A1-6-1)).

En mesurant  $2 g h_L / v^3$  en fonction de  $\frac{L}{d}$  pour différentes valeurs de  $Re$ , on obtient une relation linéaire entre ces deux premiers termes de telle sorte que l'on peut écrire

$$\frac{2 g h_L}{1 - v^3} = \frac{L}{d} \phi(Re)$$

$$\frac{d g h_L}{1 - L v^3} = \phi(Re)$$

Encore une fois, l'analyse dimensionnelle ne nous donne aucune information quant à la nature de la fonction  $\phi(Re)$ . Toutefois en analysant des données expérimentales, on constate qu'une bonne estimation de ces données peut être obtenue par l'expression suivante

$$h_L = 0.316 Re^{-1/4} \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (A1-6-5)$$

L'équation ci-dessus s'appelle l'équation de Blasius et est couramment utilisée pour calculer les pertes de charge dans les tuyaux lisses.

### 6.8.3.1 Coefficient de perte et coefficient de friction

De façon générale, les pertes  $h_L$  dépendent aussi de la rugosité de la conduite  $\epsilon$  en plus des autres variables énumérées dans l'équation (A1-6-1). En incluant  $\epsilon$  dont la dimension est celle d'une longueur aux paramètres de l'équation (A1-6-1) on obtient la relation suivante

$$2 g h_L = f \frac{L}{d} \rho \mu \bar{v}^2 \quad (A1-6-6)$$

En utilisant la méthode décrite dans la section précédente, on obtient les termes  $\pi_i$  suivants

$$\pi_1 = \frac{2 g h_L}{v^2}, \quad \pi_2 = \frac{L}{d}, \quad \pi_3 = \frac{\rho \bar{v} d}{\mu}, \quad \pi_4 = \frac{\epsilon}{d}$$

Les termes de l'équation (A1-6-6) peuvent donc être réarrangés comme suit

$$\frac{2 g h_L}{1 - \bar{v}^2} = \frac{L}{d} Re_f \frac{\epsilon}{d} \quad (A1-6-7)$$

où le terme  $\pi_1$  a été multiplié par une constante et  $f$  est une fonction quelconque. Le coefficient de perte  $K$  étant défini par

$$g'' \equiv k \frac{\bar{v}}{2}, \quad (\text{A1-6-8})$$

on obtient à partir de (A1-6-7) l'expression suivante

$$k = \frac{L}{d} \operatorname{Re}_d^{-1} \quad (\text{A1-6-9})$$

Comme dans la section précédente, on observe expérimentalement que les pertes dans une conduite sont toujours directement proportionnelles au rapport longueur/diamètre de telle sorte que l'équation ci-dessus peut être simplifiée par l'expression suivante

$$\gamma \frac{L}{d} \operatorname{Re}_d^{-\varepsilon} = \frac{L}{d} \operatorname{Re}_d^{-\varepsilon} \quad (\text{A1-6-10})$$

où  $\gamma$  et  $\varepsilon$  sont des fonctions quelconques. Le paramètre adimensionnel défini par

$$f = \gamma \operatorname{Re}_d^{-\varepsilon} \quad (\text{A1-6-11})$$

est appelé coefficient de friction de Darcy. Il est fonction du nombre de Reynolds caractérisant la nature de l'écoulement ainsi que le rapport entre la rugosité et le diamètre de la conduite. La valeur de  $\varepsilon$  dépend du type de matériau avec lequel la conduite est fabriquée et de son degré d'usure. Une table à la fin du chapitre donne des valeurs indicatives de  $\varepsilon$  pour différents matériaux. En utilisant les équations (A1-6-7), (A1-6-10) et (A1-6-11) on obtient la relation suivante

$$g''_L = f \frac{L}{d} \frac{\bar{v}^2}{2}$$

$$h_L = f \frac{L}{d} \frac{\bar{v}^2}{2g} \quad (\text{A1-6-12})$$

L'équation (A1-6-12) est appelée équation de Darcy-Weisbach.

En combinant les équations (A1-6-5) et (A1-6-12), on obtient

$$f = 0,316 \operatorname{Re}_d^{-4} \quad (\text{A1-6-13})$$

où  $f$ , pour les tuyaux lisses ne dépend que du nombre de Reynolds.



### 6.9 ANNEXE A2 : Discussion sur les pertes et les pertes moyennes.

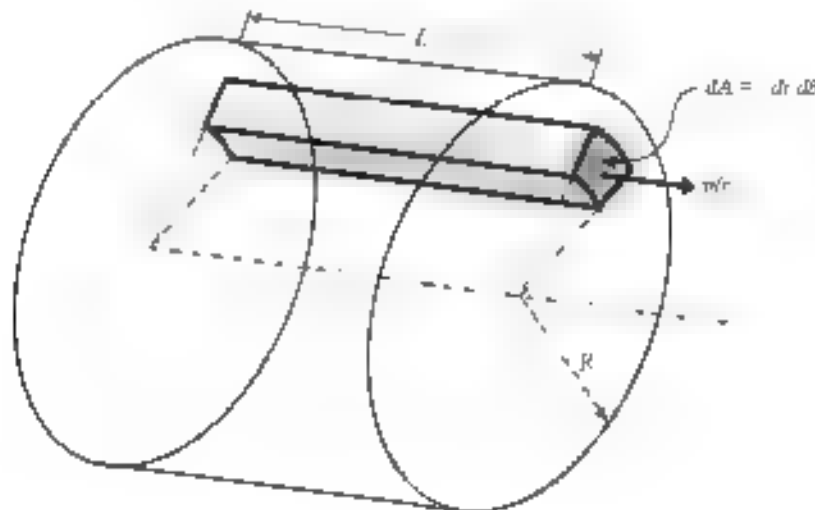
Ce qu'on appelle les « pertes » le long d'un tuyau de section constante correspond, en fait, à la moyenne des pertes associées à chacune des différentes lignes de courant joignant les « points » 1 et 2 d'un écoulement. Nous allons en faire la démonstration pour une conduite à section constante horizontale puisque c'est le seul cas pour lesquels on peut procéder à des prévisions sur l'ampleur de celles-ci. Pour la conduite inclinée, la chute de pression  $\Delta P$  est simplement remplacée par  $\Delta P$  la chute de pression piézométrique.

À titre de référence, rappelons que pour deux points d'un écoulement reliés par une ligne de courant,

$$gh_1 = u_1^2 - u_2^2 - \eta \quad (\text{A2-6-1})$$

Par souci d'économie d'écriture, on écrira désormais  $l$  pour  $gh$ .

On choisit comme système la matière à l'intérieur du volume de longueur  $l$  et de surface de passage  $dA = r \, dr \, d\theta$  représenté ci-dessous.



Le premier principe appliqué à cette situation s'écrit

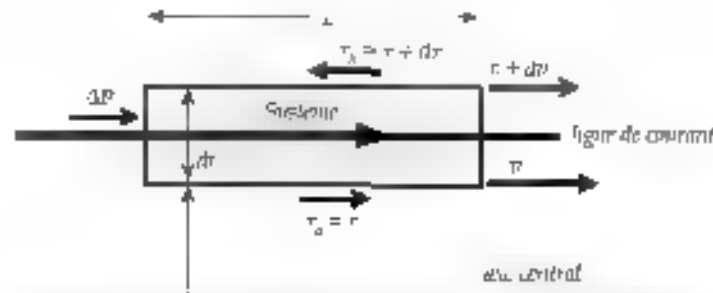
$$dW_p - dW_\tau = \delta m (u_2^2 - u_1^2 - \eta) \quad (\text{A2-6-2})$$

où  $\delta m$  : débit massique à travers  $dA$

$dW_p$  : travail net (puissance) dû à la pression

$dW_\tau$  : travail net (puissance) dû au cisaillement

Les forces (contraintes) agissant sur le bloc de matière apparaissent sur la figure ci-dessous.



Notons que le cisaillement n'agit pas sur les parois latérales verticales puisque le gradient de vitesse est nul selon la direction normale au plan de la figure.

Alors  $dW_p = \Delta P \, dr \, d\theta$

$$dW_s = L \tau_A \, dr \, d\theta = L \tau_B \, dr \, d\theta$$

$$dW_s = +L \tau_B (v + dv) (r + dr) \, d\theta = L \left[ \tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr \right] (v + dv) (r + dr) \, d\theta$$

$$dW = dW_p + dW_s$$

Si on retient uniquement les termes de premier ordre en  $dr$ ,

$$dW_s = L \tau r \frac{\partial v}{\partial r} dr \, d\theta + L r v \frac{\partial \tau}{\partial r} dr \, d\theta + L \tau v dr \, d\theta$$

Or:  $\tau = \frac{\Delta P \, r}{2L}$ , donc  $\frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{\Delta P}{2L}$

Alors, le travail total net (sous forme de puissance) s'écrit

$$dW = dW_p + dW_s = \frac{1}{2} \Delta P \, r^2 \frac{\partial v}{\partial r} dr \, d\theta \quad (\text{A2-6-3})$$

$$\delta m = \rho \tau r \, dr \, d\theta \quad (\text{A2-6-4})$$

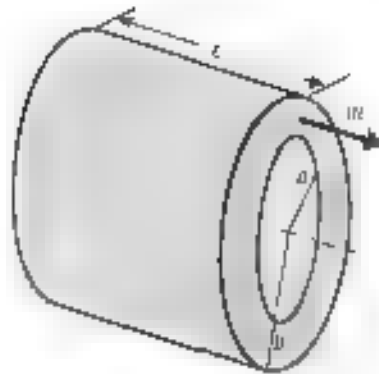
Combinant les équations (A2-6-1) à (A2-6-4), on trouve pour "

$$h_{2-2} = \frac{dW}{\delta m} = \frac{\Delta P \, r \, \partial v}{2 \rho \, v \, \partial r} \quad (\text{A2-6-5})$$

Rappelons que  $h$  désigne en fait le produit  $g h$

Le résultat (A2-6-5) permet d'évaluer les pertes de la ligne de courant qui traverse le volume de contrôle infinitésimal considéré. Du fait de la symétrie, il n'est pas surprenant que ce résultat ne dépende que de  $r$ . Considérons deux cas.



*Anneau cylindrique*

Un anneau cylindrique de rayon interne  $a$ , de rayon externe  $b$  ( $a < b < R$ ) et de longueur  $l$  est traversé par le débit  $m$ . Évaluons d'abord les pertes moyennes pour l'anneau en établissant le travail total résultant de l'action de la pression et du cisaillement

$$W_p = \int_a^b \Delta P v(r) dA = m \frac{\Delta P}{\rho}$$

$$W_s = -2\pi a l \tau(a) m(a) = -\pi a^2 \tau(a) \Delta P$$

$$W_s = +2\pi b l \tau(b) v(b) = \pi b^2 v(b) \Delta P$$

$$W = W_p + W_s = \pi \Delta P \left( \frac{b^2 v(b)}{v(a)} - \frac{a^2 \tau(a)}{\tau(b)} \right) = m \frac{\Delta P}{\rho} \left( \frac{b^2 v(b)}{v(a)} - \frac{a^2 \tau(a)}{\tau(b)} \right)$$

Le travail total

$$W = W_p + W_s = m \frac{\Delta P}{\rho} \left( 1 - \frac{b^2 v(b)}{v(a)} + \frac{a^2 \tau(a)}{\tau(b)} \right)$$

alors 
$$h_{v,1} = \frac{W}{m} = \frac{\Delta P}{\rho} \left( 1 - \frac{b^2 v(b)}{v(a)} + \frac{a^2 \tau(a)}{\tau(b)} \right)$$

où  $h_{v,1}$  désigne les pertes moyennes entre 1 et 2.

Afin d'évaluer  $\bar{h}_{1-2}$ , supposons un écoulement laminaire, c'est-à-dire

$$v(r) = v_c \left[ 1 - \frac{r^2}{R^2} \right] \quad \bar{v} = v_c \left[ 1 - \frac{(a^2 + b^2)}{2R^2} \right] \quad \text{et} \quad \dot{m} = \pi \rho \bar{v} (b^2 - a^2)$$

Alors :

$$\bar{h}_{1-2} = \frac{\Delta P}{\rho} \left[ \frac{1}{2R^2} - \frac{(a^2 + b^2)}{4R^2} \right] \quad (\text{A2-6-6})$$

On peut aussi, par ailleurs, faire usage de la formule de l'équation (A2-6-5) avec

$$h_{1-2} = \frac{1}{\mu} \int_a^b h_{1-2} \, d\mu$$

$$h_{1-2}(r) = \frac{\Delta P}{2\rho} \frac{r}{\partial r} = \frac{\Delta P}{\rho} \left[ \frac{r^2}{2R^2} - \frac{r^2}{2R^2} \right]$$

$$\bar{h}_{1-2} = \frac{1}{\mu} \int_a^b h_{1-2} \, d\mu = \frac{1}{\mu} \int_a^b \left( \frac{\Delta P}{\rho} \right) \left( \frac{r^2}{2R^2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) dr \quad (\text{A2-6-7})$$

$$\bar{h}_{1-2} = \frac{\Delta P}{\rho} \left[ \frac{1}{2R^2} - \frac{(a^2 + b^2)}{4R^2} \right]$$

Cylindre plein de rayon  $b \leq R$

On a qu'à poser  $a = 0$  dans ce qui précède pour trouver

$$W = W_p + W_r = \dot{m} \frac{\Delta P}{\rho} \left[ 1 - \frac{b^2}{2R^2} \right]$$

et

$$\bar{h}_{1-2} = \frac{W}{\dot{m}} = \frac{\Delta P}{\rho} \left[ 1 - \frac{b^2}{2R^2} \right] \quad (\text{A2-6-8})$$

Pour un écoulement laminaire,

$$\tau(r) = \tau_c \left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad \text{et} \quad v = v_c \left(1 - \frac{b^2}{2R^2}\right) \quad \text{et} \quad \dot{m} = \pi \rho b^2 \bar{v}$$

Ainsi (A2-6-8) devient

$$h_{v,2} = \frac{\Delta P}{\rho} \left(1 - \frac{b^2}{2R^2}\right) \quad (A2-6-9)$$

Ce qui correspond aussi au résultat du calcul (A2-6-7) si on pose  $\sigma = 0$ .

Finalement si on pose  $b = R$  dans (A2-6-9) ou, alternativement,  $\sigma = 0$  et  $b = R$  dans (A2-6-7), on retrouve le résultat bien connu

$$h_{v,2} = \frac{\Delta P}{\rho}$$

En conclusion, ce qu'on nomme généralement les « pertes » entre deux points d'un écoulement constituent en fait une moyenne et dans les cas considérés au chapitre 6, ce moyennage se fait sur l'ensemble de la section de la conduite.



## **2<sup>e</sup> PARTIE**

# **LA THERMODYNAMIQUE**



# CHAPITRE 1

## CONCEPTS DE BASE ET PROPRIÉTÉS DES SUBSTANCES PURES

### Table des matières

<b>1.1</b>	<b>Champs d'application de la thermodynamique.</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Concepts fondamentaux</b>	<b>4</b>
1.2.1	Système et volume de contrôle	4
1.2.2	État thermodynamique et variables d'état	4
1.2.3	Évolutions et cycles	5
<b>1.3</b>	<b>Propriétés des substances pures</b>	<b>6</b>
1.3.1	Changements de phase	6
1.3.2	Caractérisation d'un état thermodynamique pour une substance pure	9
1.3.3	Diagrammes $T-v$ , $P-T$ et $P-v$	10
1.3.4	Utilisation des diagrammes et des tables thermodynamiques	13
<b>1.4</b>	<b>Les gaz parfaits</b>	<b>17</b>
<b>1.5</b>	<b>Énergie interne</b>	<b>19</b>
1.5.1	Énergie interne d'un gaz parfait monoatomique	19
1.5.2	Énergie interne d'un gaz parfait diatomique	21
1.5.3	Énergie interne d'un gaz réel	22
1.5.4	L'énergie interne comme variable thermodynamique	22
<b>1.6</b>	<b>Équilibre thermique entre deux corps et principe zéro de la thermodynamique.</b>	<b>23</b>
<b>1.7</b>	<b>EXERCICES</b>	<b>25</b>





## 1.1 Champs d'application de la thermodynamique.

On désigne souvent la thermodynamique comme la « science de l'énergie » en ce sens qu'une de ses préoccupations principales est de comptabiliser les échanges énergétiques entre un système et son environnement et de faire usage à des fins « utiles » des modes de transformation de l'énergie d'une forme à une autre.

Les motivations qui ont donné lieu au développement de ce champ de l'activité humaine relevaient initialement de l'ingénierie. En effet, les premiers développements de la thermodynamique sont contemporains des débuts de la révolution industrielle dont l'impulsion première fut l'invention par Watt de la forme moderne de la machine à vapeur. On chercha à en expliquer le fonctionnement pour en autres, pouvoir en établir l'efficacité. La thermodynamique était donc à la base une science à caractère empirique ou expérimental. La description du comportement de la matière qu'elle faisait s'appuyait sur l'observation et impliquait l'utilisation de grandeurs macroscopiques comme la température, la pression et le volume.

Dans la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle on a assisté à l'émergence d'une nouvelle discipline, la mécanique statistique, dont l'objet était de prévoir le comportement de la matière à l'échelle microscopique à partir de celui de ses constituants microscopiques, les atomes et les molécules. Alors que la thermodynamique classique ne faisait aucune hypothèse sur la structure de la matière, le lien que se proposait d'effectuer la mécanique statistique entre les niveaux microscopique et macroscopique nécessitait qu'on se dote d'un modèle de la constitution de la matière au niveau fondamental. C'est à partir de cette époque que le modèle atomique acquit la reconnaissance qui est la sienne aujourd'hui.

La thermodynamique contemporaine est donc tributaire de ces deux approches et intègre leurs méthodologies respectives. Dans le cadre de problèmes qui relèvent du génie, l'approche de la thermodynamique classique (ou appliquée) se révèle généralement suffisante. C'est donc celle-ci qui sera décrite dans le cadre de ce qui suit. Nous nous permettons à l'occasion d'introduire des résultats provenant de la mécanique statistique afin d'envisager certains concepts sous un jour différent. Le tableau 1.1 donne une liste non-exhaustive des domaines pour laquelle la thermodynamique appliquée s'avère utile.

- Moteurs
- Turbines
- Compresseurs, pompes
- Centrales thermiques
- Systèmes de combustion
- Systèmes cryogéniques
- Chauffage, ventilation et climatisation
- Systèmes énergétiques alternatifs
- Applications biomédicales

**Tableau 1.1** Champs d'applications de la thermodynamique

## 1.2 Concepts fondamentaux

### 1.2.1 Système et volume de contrôle

Nous rappelons ici les définitions introduites au chapitre 3 de la mécanique des fluides

**Système** : masse spécifique qu'on a décidé d'étudier. Le système est entouré d'un milieu ambiant ou environnement avec lequel il est en interaction. S'il n'y a pas d'interaction, on dit du système qu'il est isolé.

**Volume de contrôle** : région de l'espace faisant l'objet d'une étude. La région extérieure au volume de contrôle constitue son environnement avec lequel le volume de contrôle peut échanger de la masse et de l'énergie.

**Remarque** : Certains auteurs utilisent les expressions de « système fermé » pour désigner un système et « système ouvert » pour désigner un volume de contrôle.

### 1.2.2 État thermodynamique et variables d'état

Le champ d'analyse de la thermodynamique classique est restreint aux systèmes qui sont en équilibre thermodynamique (que nous désignerons désormais par le seul vocable d'équilibre). On dit qu'un système est en équilibre lorsque si on l'isole de son environnement, on n'observe ni une variation de ses propriétés macroscopiques. De façon plus concrète, l'équilibre thermodynamique implique trois types d'équilibres :

- 1) équilibre mécanique :  $\sum F = 0$  implique que la pression est uniforme dans le système.
- 2) équilibre thermique : implique que la température est uniforme dans le système.
- 3) équilibre chimique : implique que les réactions chimiques, s'il y a lieu, sont terminées et que la répartition des espèces chimiques est homogène.

On parle d'état thermodynamique du système (ou état du système) lorsque celui-ci est en équilibre. La thermodynamique classique est impuissante à décrire un système dans une configuration hors-équilibre. Il ne s'agit pas alors d'état thermodynamique à proprement parler. À l'équilibre, les différentes propriétés macroscopiques du système (pression, température, etc.) sont bien définies et servent en fait à caractériser l'état en question. Parmi les plus usuelles on retrouve les propriétés de : température, pression, volume et d'énergie du système. On utilise les termes de variables d'état ou variables thermodynamiques pour les désigner. Ainsi, à chaque état correspond un ensemble de nombres, les grandeurs de ces variables d'état. Chaque ensemble de variables d'état est propre à un état thermodynamique spécifique et permet de le caractériser. Si le système évolue vers un autre état, les variables d'état seront

conséquentiellement altérées. Ce qui précède n'exclut pas qu'une variable, la température par exemple, puisse avoir la même valeur pour deux états distincts, mais l'ensemble des variables différera. La question de savoir combien de ces variables doivent être connues pour spécifier un état sera abordée plus loin.

### 1.2.3 Évolutions et cycles

On dit qu'un système effectue une *évolution* (ou transformation), quand le système connaît un changement d'état. Il existe en général, une infinité de façons différentes pour le système d'évoluer d'un état vers un autre. Parmi celles-ci on en remarque une classe d'importance particulière en thermodynamique, l'*évolution quasi statique*.

Une évolution est dite quasi statique lorsque toutes les configurations intermédiaires d'un système, quand il passe d'un état à un autre, constituent elles-mêmes des états thermodynamiques (états d'équilibre). L'évolution s'effectuera alors de façon contrôlée et à chaque instant on pourra assigner une valeur définie aux différentes variables d'état. Une telle évolution peut être stoppée et inversée à tout moment. À titre d'exemple considérons les deux évolutions illustrées à la figure 1.1.

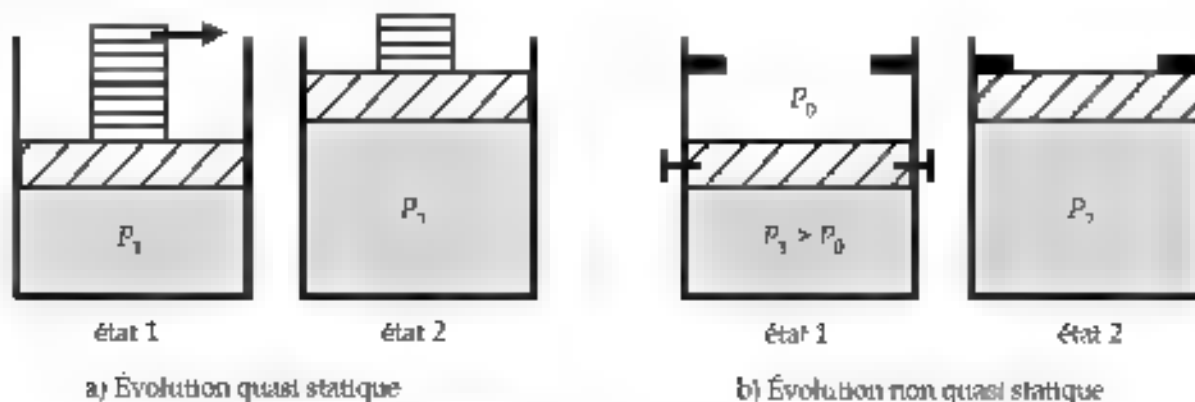


Figure 1.1 Évolutions quasi statique et non quasi statique

À la figure 1.1 a), la substance (le système) est comprimée par un piston sur lequel on a disposé un grand nombre de petites masses (en théorie infiniment petites). Si on en retire une, les pressions exercées par le piston et dans le système ne diffèrent que très peu, le piston ne sera pas accéléré et l'équilibre dans le système se rétablira presque immédiatement. À la figure 1.1 b), un piston est retenu par un ensemble de goupilles. Comme la pression du système est plus grande que la pression environnante  $P_0$ , le piston sera accéléré au moment de l'enlèvement des goupilles jusqu'à ce qu'il heurte les butées du haut et que l'équilibre se rétablisse (état 2). Remarquons que lorsque le piston passe par le point B, les différentes variables d'état n'ont pas de valeur uniforme à travers le système et cette configuration ne peut être qualifiée d'état d'équilibre ou thermodynamique. La différence fondamentale entre les deux processus est évidente. Dans le cas de l'évolution quasi statique, toutes les configurations intermédiaires sont des états thermodynamiques, on connaît les conditions qui prévalent dans le système à chaque instant lors de l'évolution. Pour l'évolution non quasi statique, seuls les états de départ et d'arrivée sont connus, on ne sait rien du système entre ces deux instants.

Un cycle thermodynamique (ou évolution cyclique) comporte un ensemble d'évolutions effectuées séquentiellement de façon à ce que le système soit ramené à son état de départ après les avoir parcourues.

Un certain nombre d'évolutions sont tellement courantes en thermodynamiques qu'on a jugé utile de les nommer. Parmi celles-ci on retrouve, en particulier :

- évolution *isobare* : évolution s'effectuant à pression constante
- évolution *isotherme* : évolution à s'effectuant température constante
- évolution *isochore* : évolution à s'effectuant volume constant

Notons que si une variable présente la même valeur au début et à la fin de la transformation, on ne peut conclure qu'elle se soit maintenue constante tout le long de l'évolution. Ainsi, par exemple, il arrive que les températures aux états de départ et de fin soient identiques, cela ne fait pas de l'évolution une évolution isotherme.

### 1.3 Propriétés des substances pures

La matière apparaît sous trois formes qu'on dénomme *phases* : la phase solide, la phase liquide et la phase vapeur. Souvent deux phases d'une substance existent simultanément (on peut même faire cohabiter les trois phases en même temps), on parle alors d'équilibre de phase. On dit d'une substance qu'elle est pure si la composition chimique du système est homogène et stable. Ainsi, un mélange d'eau liquide et vapeur est une substance pure. Bien que l'air ne soit pas une substance pure à proprement parler (il s'agit d'un mélange gazeux), il sera pour la suite considéré comme tel dans la mesure que les espèces chimiques le composant restent sous forme gazeuse.

#### 1.3.1 Changements de phase

La figure 1.2 illustre une évolution à pression constante quasi statique effectuée sur de l'eau.

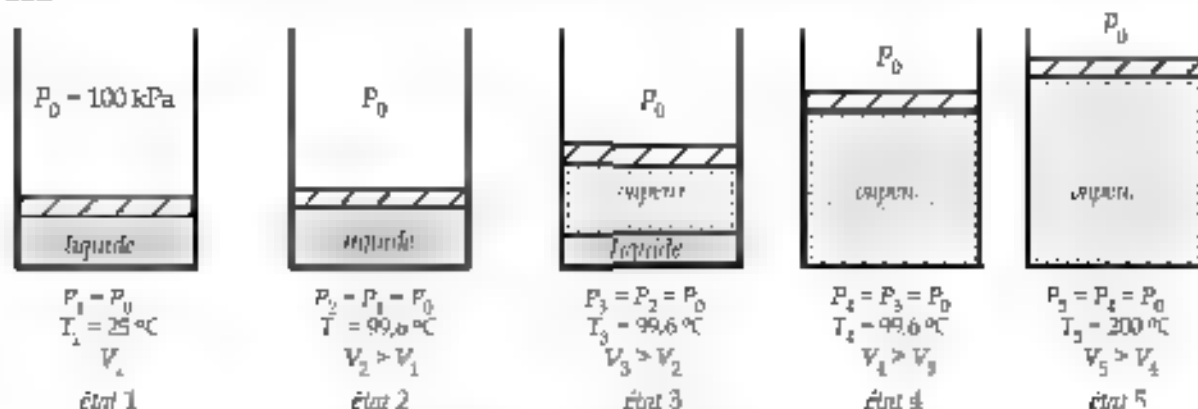


Figure 1.2 Évolution isobare

De l'eau liquide à  $25\text{ °C}$  (état 1) est placée sous un piston de masse négligeable qui peut se déplacer sans frottement. Il s'ensuit que la pression à cet état est égale à la pression atmosphérique

$P_0$ . La substance est alors chauffée en la mettant en contact avec un corps à haute température (l'élément d'une cuisinière par exemple).

Remarquons d'abord que la pression ne sera pas affectée par le chauffage (processus isobare) puisque le piston est libre de se déplacer et que la seule force agissant sur le système provient de l'action de la pression atmosphérique  $P_0$ . On observe que le volume et la température augmentent jusqu'à ce que cette dernière atteigne  $99,6^\circ\text{C}$  (état 2). Si le chauffage de la substance est poursuivi, on observe que de la vapeur d'eau apparaît au-dessus de la phase liquide. Comme la masse volumique de la vapeur est moins grande que celle du liquide, le volume total augmente rapidement. Toutefois, la température se maintient constante durant toute la vaporisation de l'eau. L'état 3 est représentatif des états intermédiaires entre le début et la fin de la vaporisation. À la toute fin de la vaporisation (état 4), l'eau n'existe que sous forme vapeur. En poursuivant le chauffage à partir de cet état on observe un comportement qui rappelle celui que présentait la substance sous la forme liquide, à savoir que la température et le volume augmentent. Le chauffage cesse lorsque la température atteint  $200^\circ\text{C}$  (état 5).

Si on se représente l'ensemble des états par lesquels est passée l'eau sur un diagramme température-volume (diagramme  $T-V$ ), on obtient la courbe A de la figure 1.3 sur laquelle on a situé les états 1 à 5 ci-haut mentionnés.

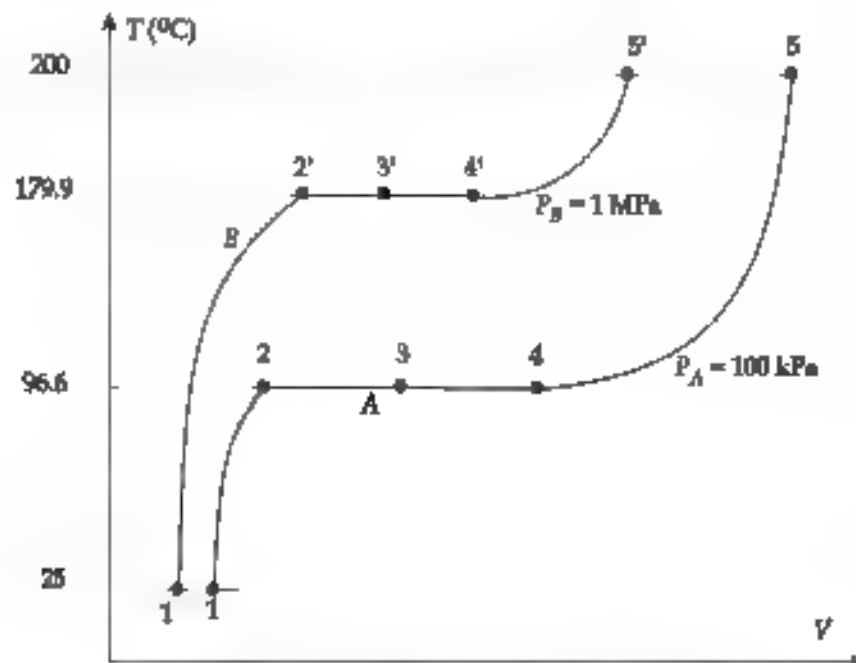


Figure 1.3 Évolutions isobares sur un diagramme  $T-V$

Si l'évolution était répétée entre les mêmes températures à la pression de 1 MPa, on obtiendrait la courbe B. Les états 1 à 5' correspondent aux états 1 à 5. On observe que l'allure générale des deux courbes est la même mais que la température à partir de laquelle la vaporisation se produit est plus élevée.

Les états 2 à 4 et 2' à 4' sont des états pour lesquels les phases vapeur et liquide sont en équilibre. On dit de ces états que ce sont des états de saturation ou états saturés. On remarque que lorsque

la pression est fixée pour ces états (100 kPa ou 1 MPa, par exemple). Une seule température est observée. Pour ces états, les variables de température et de pression ne sont pas indépendantes. La température pour laquelle on obtient un mélange liquide-vapeur à une pression donnée porte le nom de *température de saturation* ( $T_s$ ). De façon similaire, la pression pour laquelle on a un mélange liquide-vapeur à une température donnée est dénommée *pression de saturation* ( $P_s$ ).

Alors	si $P = 100 \text{ kPa}$	$T_s = 99,6 \text{ }^\circ\text{C}$
et	si $T = 179,9 \text{ }^\circ\text{C}$	$P_s = 1 \text{ MPa}$

On peut représenter l'ensemble des couples pression-température pour lesquelles les mélanges liquide-vapeur sont possibles sur un diagramme pression-température. La courbe ainsi obtenue est appelée *courbe de vaporisation* (figure 1.4).

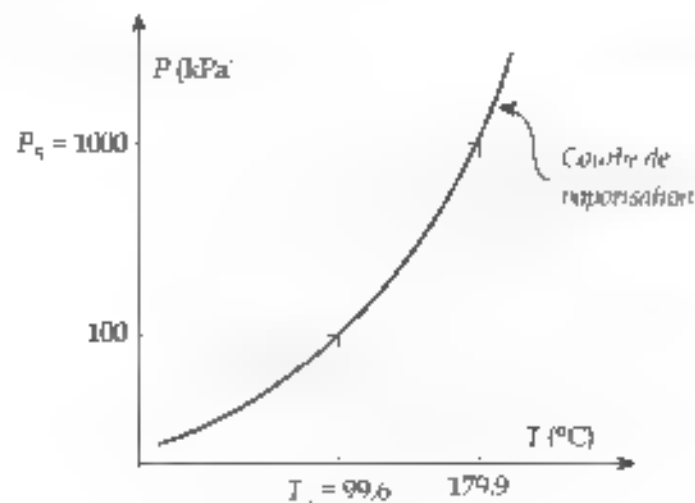


Figure 1.4 Courbe de vaporisation de l'eau

Pour un mélange liquide-vapeur il est particulièrement utile de connaître la proportion de la masse totale que l'on retrouve dans les phases gazeuse et liquide. Si  $m_g$  désigne la masse gazeuse et  $m$  la masse du système (masse totale), alors le *titre*  $x$  est défini par

$$x = \frac{m_g}{m} \quad (1.1)$$

Le titre désigne ainsi le pourcentage de la masse du système qu'on retrouve sous forme vapeur. Un état pour lequel  $x = 0$  (liquide seulement) est appelé *état de liquide saturé* alors qu'un état pour lequel  $x = 1$  est dénommé *état de vapeur saturée*. Notons avant de conclure que la variable  $x$  ne prend un sens que pour les états de mélange liquide-vapeur. Ainsi à l'état 1 de l'exemple de la figure 1.3 la substance n'est pas à des conditions de pression et de température pour lesquelles un mélange liquide-vapeur serait possible, il ne s'agit pas d'un état de saturation. Le titre n'est pas défini dans ces conditions et ce serait une erreur de dire qu'il est nul. On dira plutôt que l'état de la substance est un état de *liquide comprimé*. De la même façon, l'état 5 de

même exemple n'est pas un état, pour lequel  $x = 1$  puisque  $T \neq T_{\text{sat}}$  (ce n'est pas un état saturé). Comme l'eau est sous forme vapeur, on la désignera comme de la *vapeur saturée*.

### 1.3.2 Caractérisation d'un état thermodynamique pour une substance pure

Nous avons vu précédemment qu'un état thermodynamique se distingue d'un autre par les valeurs que prennent ses variables d'état. La question se pose maintenant de savoir combien de ces variables doivent être connues afin de caractériser complètement un état. Avant de répondre à cette question, considérons les variables d'état avec lesquelles nous serons appelés à travailler par la suite.

Symbole	Variable	Unité S.I.
$P$	pression	Pa
$T$	température	K
$x$	titre	
$V$	volume	m <sup>3</sup>
$U$	énergie interne	J
$H$	enthalpie	J
$S$	entropie	J/K

**Tableau 1.2** Liste des variables thermodynamiques que nous emploierons

À l'exception des deux dernières, l'enthalpie et l'entropie, ces grandeurs sont familières à la plupart. Pour cette raison, pour ce qui suit, limitons la discussion aux cinq premières variables ( $P$ ,  $T$ ,  $x$ ,  $V$  et  $U$ ). Supposons que l'on dispose d'une certaine quantité d'eau à un état thermodynamique donné. Chacune de ces variables prend alors une valeur déterminée. Scindons alors le système en deux parties égales et voyons en quoi les différentes variables de chaque sous-système ainsi produit seront affectées par l'opération. On remarque que pour un certain nombre de celles-ci ( $P$ ,  $T$ ,  $x$ ), la valeur de la variable reste inchangée alors que pour les autres ( $V$ ,  $U$ ), la valeur de la variable pour chaque sous-système représente la moitié de la valeur qu'elle a pour le système entier. Ces deux classes de variables sont donc qualitativement différentes. On définit les concepts suivants :

**variable intensive** : variable dont la grandeur ne dépend pas de la masse du système

**variable extensive** : variable dont la grandeur est proportionnelle à la masse du système

On peut produire une variable intensive à partir d'une variable extensive en la divisant par la masse. Ainsi, définissons

$$\begin{aligned} v &= \frac{V}{m} \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right] && \text{volume massique} \\ u &= \frac{U}{m} \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] && \text{énergie interne massique} \\ h &= \frac{H}{m} \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] && \text{enthalpie massique} \\ s &= \frac{S}{m} \left[ \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kg}} \right] && \text{entropie massique} \end{aligned}$$

En l'absence d'effets gravitationnels, électromagnétiques et de tension de surface, l'expérience montre que

**Il suffit de connaître deux variables intensives pour caractériser un état thermodynamique.**

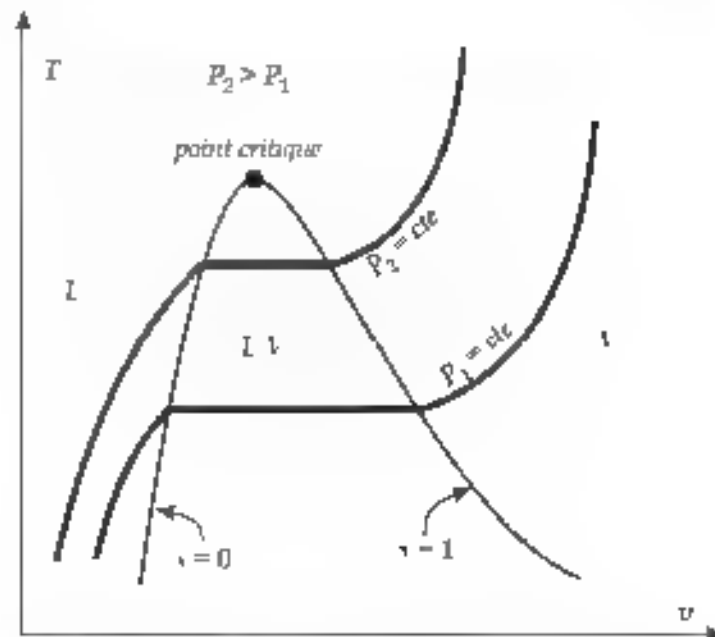
En conséquence, la connaissance de deux variables intensives permet de déterminer toute autre variable intensive caractéristique de l'état considéré. Connaître  $T$  et  $v$  par exemple, permet d'établir  $P$ ,  $u$  (s'il y a lieu),  $h$  et  $s$ . Toutes les paires de deux variables intensives envisageables sont acceptables à l'exception de la combinaison de la pression et de la température pour un état saturé.

### 1.3.3 Diagrammes $T$ - $v$ , $P$ - $T$ et $P$ - $v$

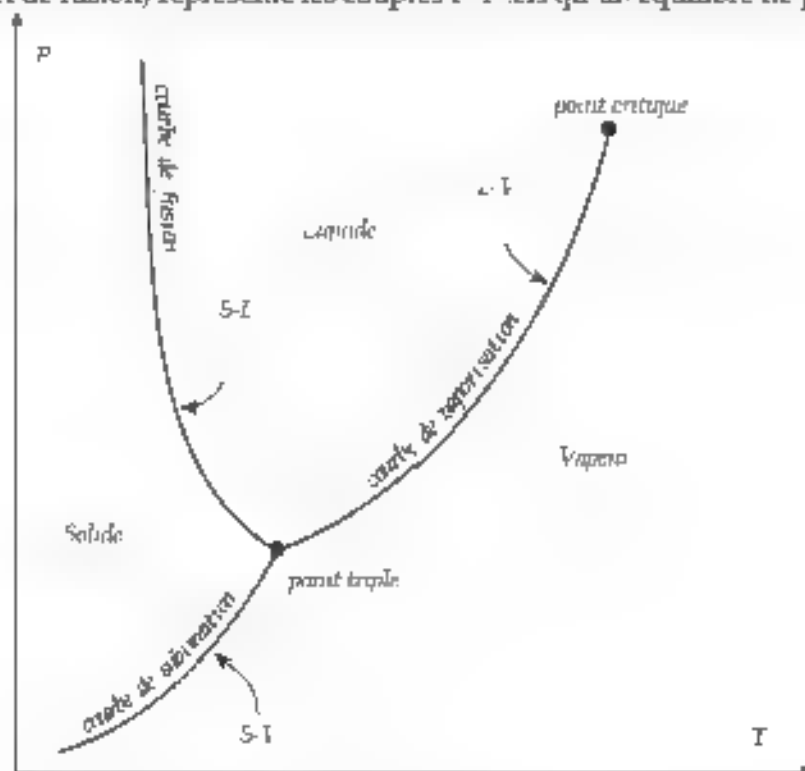
Si l'expérience de la figure 1.2 est répétée un grand nombre de fois à diverses pressions et qu'on note les couples température-volume massique ( $T$ ,  $v$ ) pour les états de liquide saturé ( $x = 0$ ) et de vapeur saturée ( $x = 1$ ) dans chaque cas, une courbe en forme de cloche apparaît sur un diagramme  $T$ - $v$  (figure 1.5). La portion gauche de la courbe correspond à l'ensemble des états de liquide saturé, et la portion droite, à l'ensemble des états de vapeur saturée possibles. Les états compris entre les états de liquide saturé et les états de vapeur saturée sont manifestement des états de mélange liquide-vapeur.

Ainsi, les états situés dans la région comprise sous la « cloche » du diagramme  $T$ - $v$  (région L-V de la figure 1.5), sont des états de mélange liquide-vapeur. En contrepartie, les états qui se situent soit à gauche, soit à droite de la « cloche », sont des états respectivement, de liquide comprimé (région I de la figure 1.5) et de vapeur surchauffée (région V de la figure 1.5). On remarque que les courbes de liquide saturé et de vapeur saturé se rencontrent en un point appelé *point critique*. Les températures, pression et volume massique à cet état sont dénommés *température critique* ( $T_c$ ), *pression critique* ( $P_c$ ) et *volume massique critique* ( $v_c$ ), respectivement. On a aussi représenté l'autre que prennent deux évolutions isobares dans ce type de diagramme. Ce pourrait être, par exemple, les évolutions à 100 kPa et 1 MPa que nous avons déjà décrites.



Figure 1.5 Diagramme  $T-v$  d'une substance pure

Le diagramme  $P-T$  (ou diagramme de phases, de la figure 1.6 est une extension de la figure 1.4 ou apparaît entre autres la phase solide. Chacune des courbes du diagramme (de vaporisation, de sublimation et de fusion) représente les couples  $P-T$  tels qu'un équilibre de phase est possible.

Figure 1.6 Diagramme  $P-T$  pour une substance comme l'eau

Remarquons que les courbes se rencontrent au point triple qui spécifie les conditions de température et de pression telles qu'un équilibre des trois phases de la substance est possible.

Par exemple pour l'eau, les pression et température au point triple sont 0,6113 kPa et 0,01 °C respectivement, et un équilibre dans des proportions variables de glace, d'eau liquide et de vapeur d'eau est possible. Chaque point d'un diagramme  $P-T$  est caractéristique d'un état sauf pour les points se trouvant sur l'une des trois courbes. On a vu en effet que pour un mélange liquide-vapeur il existe une infinité d'états  $0 < x < 1$  pour lesquels la pression et la température ont les grandeurs spécifiées par la courbe de vaporisation. Il en va de même pour les mélanges solide-liquide et solide-vapeur.

Chaque point des courbes de vaporisation, de sublimation et de fusion représente donc en fait une infinité d'états distincts. A la figure 1.7 on a illustré l'évolution isobare dont on a discuté précédemment (figure 1.2). Notons que l'ensemble des états 2 à 4 sont confondus en un point.

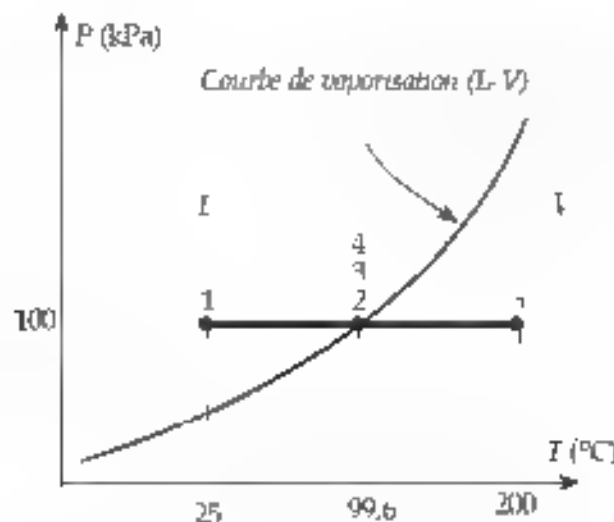
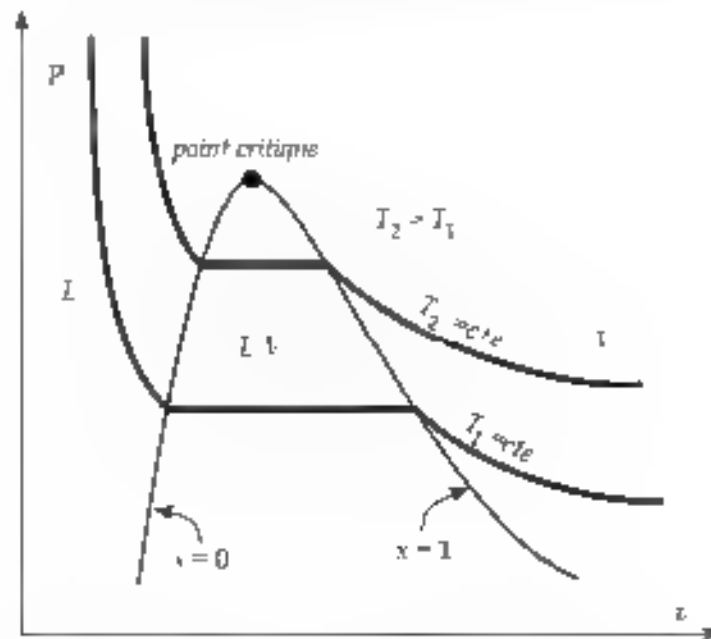


Figure 1.7 Evolution de la figure 1.2 sur un diagramme  $P-T$

Le diagramme pression-volume massique ( $P-v$ ) est d'importance particulière en thermodynamique comme nous le verrons au chapitre 2. La figure 1.8 représente le diagramme  $P-v$  d'une substance pure. On remarque la présence de la « cloche » sous laquelle sont regroupés les états de mélange liquide-vapeur (L-v), ainsi que les régions de vapeur surchauffée (v) et de liquide comprimé (L) de part et d'autre de celle-ci. On a aussi dessiné les courbes représentant deux évolutions isothermes (température constante).

Figure 1.8 Diagramme  $P$ - $v$  d'une substance pure

### 1.3.4 Utilisation des diagrammes et des tables thermodynamiques

Un mélange liquide-vapeur est en fait un mélange de liquide saturé et de vapeur saturée dans les proportions déterminées par le titre  $x$ . Si on veut établir le volume massique dans ces conditions il suffit donc de connaître les volumes massiques du liquide saturé ( $x = 0$ ), de la vapeur saturée ( $x = 1$ ) ainsi que le titre. Comme le volume est une variable extensive, on peut par définition écrire

$$V = V_f + V_g$$

Les indices  $f$  et  $g$  r  f  rent aux   tats de liquide saturé et de vapeur saturée respectivement.

Alors

$$V = \frac{V_f}{m} + \frac{V_g}{m} = \frac{m_f}{m} v_f + \frac{m_g}{m} v_g$$

Par définition,

$$x = \frac{m_g}{m} \quad \text{et} \quad (1-x) = \frac{m_f}{m}$$

En réarrangeant, il vient :

$$v = v_f + x(v_g - v_f)$$

$$n = n_f + x n_g \quad (1.2)$$

ou

$$v_g = v_g - v_f \quad (1.3)$$

De l'équation (1.2) on tire aussi :  $x = \frac{n - n_f}{n_g - n_f}$  (1.4)

Le résultat (1-2) et donc le résultat (1-4) est une conséquence du fait que  $v$  est une variable extensive et que les volumes des tractions liquide et vapeur s'additionnent. Puisque ce constat s'applique à toute variable extensive il y aura des équivalents à (1-2) et à (1-4) pour les autres variables extensives avec lesquelles nous serons amenés à travailler. Ainsi, considérant une variable extensive hypothétique  $y$ , sa variable correspondante massique s'obtiendra dans le cas d'état saturé par

$$y = y_f + x(y_g - y_f) \quad (1-5)$$

et on aura :

$$x = \frac{y - y_f}{y_g - y_f} \quad (1-6)$$

Par exemple, pour l'énergie interne massique  $u$

$$u = u_f + x(u_g - u_f)$$

**Exemple 1.1** Soit de l'eau à  $P = 300 \text{ kPa}$ . Déterminez le volume massique pour les températures :

- i)  $T_v = 150^\circ\text{C}$
- ii)  $T_s = 100^\circ\text{C}$
- iii)  $T_c = 133,5^\circ\text{C}$

*Solution:*

En se référant à la table A.1.2 on peut situer les 3 points (états) sur un diagramme  $P-T$

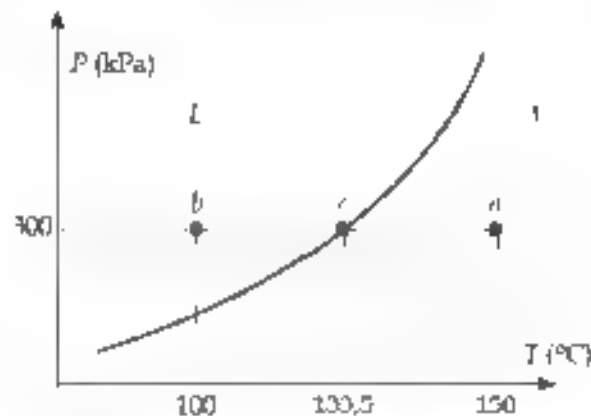


Figure 1.9 États de l'exemple 1.1 sur un diagramme  $P-T$

- i)  $P = 300 \text{ kPa}$   
 $T_v = 150^\circ\text{C} > T_s \mid$  vapeur surchauffée

De la table A.1.3 on tire  $v_g = 0,6339 \text{ m}^3/\text{kg}$

$$\text{ii)} \quad \left. \begin{array}{l} P = 300 \text{ kPa} \\ T_b = 100^\circ\text{C} < T \end{array} \right\} \text{liquide comprimé}$$

A la table A.1.4, on remarque que les premières entrées correspondent à une pression de 5 MPa ( $\gg 300 \text{ kPa}$ ). Lorsque l'on ne dispose pas de tables de liquide comprimé ou, comme c'est le cas ici, elles sont incomplètes, on procède de la façon qui suit. On admettra que le liquide comprimé est dans le même état que le liquide saturé à la même température. Ainsi

$$v_b = v_f(100^\circ\text{C}) = 0.001044 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$\text{iii)} \quad \left. \begin{array}{l} P = 300 \text{ kPa} \\ T = 133.5^\circ\text{C} = T_s \end{array} \right\} \text{mélange liquide-vapeur}$$

On ne dispose pas de suffisamment d'information pour établir :

**Exemple 1.2.** Soit du réfrigérant R-134a à  $P = 200 \text{ kPa}$

Déterminez la température et le titre (s'il y a lieu) pour

$$\text{i)} \quad v_f = 0.04 \text{ m}^3/\text{kg} \quad \text{et} \quad \text{ii)} \quad v_g = 0.12 \text{ m}^3/\text{kg}$$

*Solution*

En se référant à la table A-12, on trouve pour  $P = 200 \text{ kPa}$ ,

$$v_f = 0.0007532 \text{ m}^3/\text{kg} \quad \text{et} \quad v_g = 0.0993 \text{ m}^3/\text{kg}$$

On peut situer les états sur un diagramme  $P$ - $v$ .

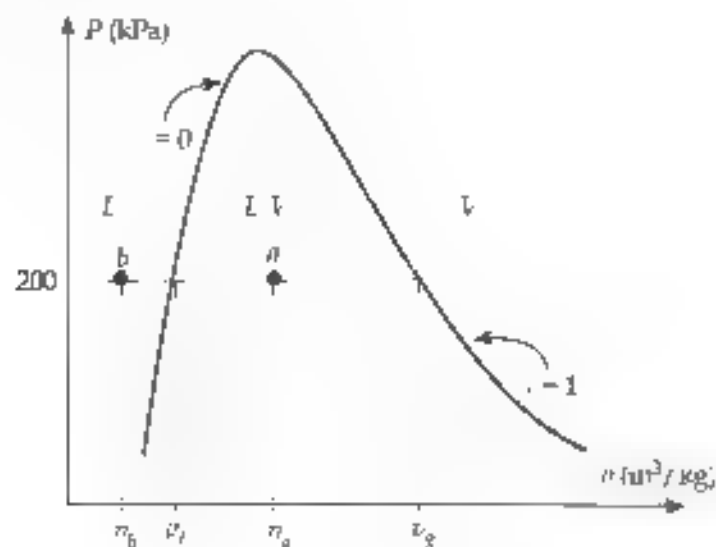


Figure 1.10 États  $a$  et  $b$  de l'exemple 1.2

$$\text{i)} \quad \left. \begin{array}{l} P = 200 \text{ kPa} \\ v_f = 0,04 \text{ m}^3/\text{kg} \end{array} \right\} v_f < v_o < v_g \Rightarrow \text{mélange liquide-vapeur}$$

Puisque  $v_o = v_f + x_g v_{fg}$

alors  $x_g = \frac{v_o - v_f}{v_{fg}} = 0,398$  et  $T_o = 10,39 \text{ } ^\circ\text{C}$

$$\text{ii)} \quad \left. \begin{array}{l} P = 200 \text{ kPa} \\ v_g = 0,12 \text{ m}^3/\text{kg} \end{array} \right\} v_g > v_g \Rightarrow \text{vapeur surchauffée}$$

Le titre n'est pas défini à cet état.

Par interpolation dans la table A-13,  $T_g = 33,2 \text{ } ^\circ\text{C}$

**Exemple 1.3** Soit de l'eau à  $T = 200 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Déterminez l'énergie interne massique pour les volumes massiques suivants

i)  $v_f = 0,1 \text{ m}^3/\text{kg}$  et ii)  $v_g = 0,206 \text{ m}^3/\text{kg}$

*Solution*

En se référant à la table A-1.1, on trouve

$$v_f = 0,001157 \text{ m}^3/\text{kg} \quad \text{et} \quad v_g = 0,12736 \text{ m}^3/\text{kg}$$

On peut situer les deux états sur un diagramme  $T-v$ .

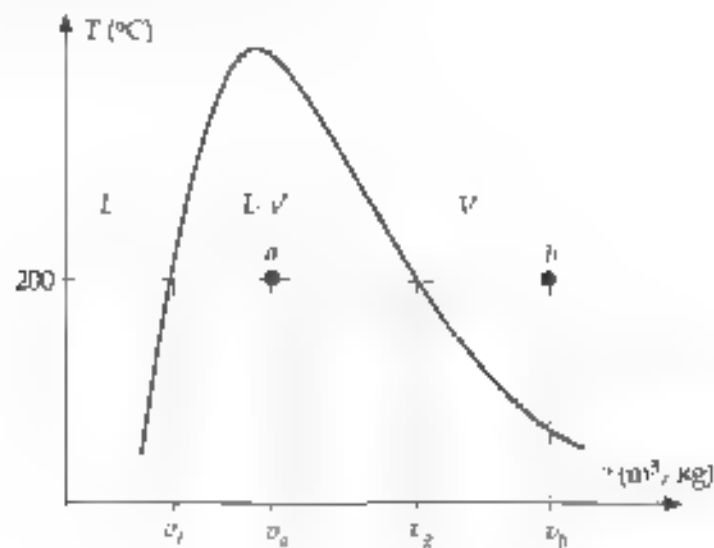


Figure 1.11 États a et b de l'exemple 1.3

$$\text{i)} \quad \left. \begin{array}{l} T = 200 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ v_1 = 0,1 \text{ m}^3/\text{kg} \end{array} \right\} v_f < v_1 < v_g \Rightarrow \text{mélange liquide-vapeur}$$

Puisque  $v_1 = v_f + x_g v_g$

alors  $x_g = \frac{v_1 - v_f}{v_g - v_f} = 0,7832$

Ainsi  $u_1 = u_f + x_g u_{fg}$  ( $u_f$  et  $u_{fg}$  à la table A.1.1.

$$\therefore u_1 = 2217,1 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{ii)} \quad \left. \begin{array}{l} T = 200 \text{ }^{\circ}\text{C} \\ v_1 = 0,206 \text{ m}^3/\text{kg} \end{array} \right\} v_1 > v_g \Rightarrow \text{vapeur surchauffée}$$

A la table A.1.3 on trouve  $P_0 = 1 \text{ MPa}$   
et  $u_g = 2621,9 \text{ kJ/kg}$

#### 1.4 Les gaz parfaits

En général les molécules d'un gaz interagissent entre elles par le biais de forces intermoléculaires (ou interatomiques) qui sont généralement globalement attractives mais qui peuvent être répulsives à l'occasion (très grande densité). Un gaz parfait est défini comme un gaz pour lequel ces interactions sont inexistantes. On admet toutefois que les molécules peuvent entrer en collision avec elles-mêmes et les parois d'un contenant. On peut penser à un grand nombre de boules de ping-pong se déplaçant dans toutes les directions et se heurtant à l'occasion par le biais de collisions élastiques. À l'aide de la mécanique statistique ou de la cinétique des gaz, il est possible de montrer que les considérations qui précèdent conduisent à l'équation suivante, la loi des gaz parfaits

$$PV = Nk_B T \quad (1.7)$$

où :  $N$  = nombre total de molécules (ou d'atomes) de gaz  
 $k_B$  = constante de Boltzmann (constante universelle)

$$k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

Utilisant le nombre d'Avogadro,  $N_A$ , et la masse molaire  $M$  du gaz, on définit la constante du gaz  $R$

$$R = \frac{N_A k_B}{M} \left[ \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kg}} \right] \quad (\text{table A.8})$$

et l'équation (1.7) s'écrit

$$PV = mRT \quad (1.8)$$

En divisant par la masse de part et d'autre, on trouve

$$Pv = RT \quad (1.9)$$

Dans le cadre de ce cours nous utiliserons les formes (1.8) et (1.9) de la loi des gaz parfaits car elles font intervenir des variables thermodynamiques usuelles.

*Note* Il existe une dernière forme de la loi des gaz parfaits que les chimistes préfèrent employer faisant usage de  $n$ , le nombre de moles de substance plutôt que de la masse

$$PV = n\bar{R}T$$

avec  $\bar{R}$  la constante universelle des gaz  $\bar{R} = N_A R_u = 8.314 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$

Pour illustrer la différence dans les comportements que présentent les gaz parfaits et les gaz réels, respectivement, considérons la figure 1.12

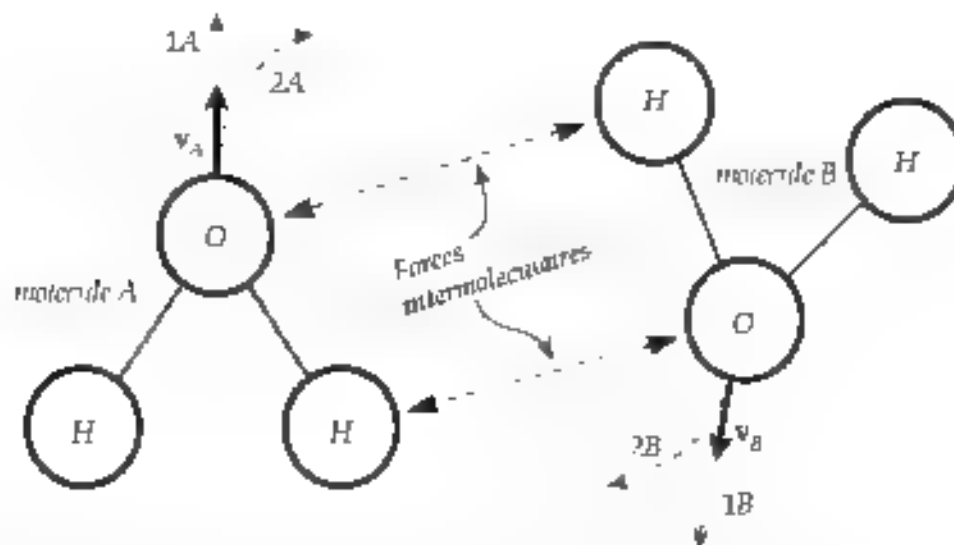


Figure 1.12 Trajectoires de deux molécules d'eau en absence et en présence de forces attractives

Cette figure présente les trajectoires que décriraient deux molécules d'eau lorsqu'il n'y a pas d'interaction entre elles (gaz parfait) et lorsqu'une force attractive existe entre elles. En absence d'interaction, chacune des molécules suivra une trajectoire rectiligne dans le prolongement de sa vitesse à cet instant (trajectoires 1A et 1B). Si on admet toutefois qu'elles interagissent par le biais d'une force résultante attractive, les trajectoires seront affectées et prendront les allures représentées 2A et 2B de la figure. Puisque la grandeur des forces intermoléculaires (ce sont des forces électriques) décroît avec la distance intermoléculaire, on comprendra que ces interactions soient fortement dépendantes de la densité du gaz.



De plus, outre les équations d'état (1.7) à (1.9), l'hypothèse de gaz parfait conduit à un résultat fondamental en thermodynamique. La mécanique statistique nous enseigne que l'énergie cinétique de translation des molécules est reliée à la température. Si  $K_{\text{trans}}$  désigne l'énergie cinétique moyenne associée au déplacement dans l'espace d'une molécule (translation), alors

$$\bar{K}_{\text{trans}} = \frac{3}{2} k_B T \quad (1.10)$$

Bien que le résultat (1.10) ait originellement été dérivé comme conséquence de l'hypothèse de gaz parfait, il est possible de montrer qu'il est applicable aux gaz réels sous certaines conditions. Ce résultat est important à bien des égards, notamment parce qu'il permet de relier un paramètre microscopique  $K_{\text{trans}}$  au paramètre macroscopique de température et fournit une interprétation du concept de température.

Les considérations qui précèdent permettent de définir les conditions sous lesquelles un gaz réel pourra être traité comme un gaz parfait. Si la distance intermoléculaire est suffisamment grande (volume important ou faible pression) ou si la vitesse des molécules est suffisamment grande de sorte qu'elle soit peu affectée par les forces intermoléculaires (haute température), le gaz réel présentera un comportement approximant celui d'un gaz parfait et pourra être considéré comme tel. En termes concrets, on se dote des barèmes suivants : un gaz réel se comporte comme un gaz parfait quand

- 1) la pression est beaucoup plus petite que la pression critique du gaz, peu importe la température.

ou,

- 2) la température est supérieure à deux fois à la température critique pour des pressions allant jusqu'à quatre fois la pression critique.

Les constantes critiques de plusieurs gaz apparaissent au tableau 1.A.6.

## 1.5 Énergie interne

Le premier principe de la thermodynamique qui sera présenté au chapitre suivant met en cause une grandeur physique, l'énergie interne ( $U$ ), qui est souvent mal comprise. Le propos de la discussion qui suit est d'en expliquer la nature et d'établir qu'il s'agit d'une propriété thermodynamique (variable d'état).

### 1.5.1 Énergie interne d'un gaz parfait monoatomique

Le système le plus simple à analyser en ce qui a trait à son énergie interne, est le gaz parfait monoatomique. C'est pourquoi nous l'avons choisi comme premier sujet d'étude. Un gaz de ce type peut être assimilé à un ensemble de billes n'exerçant aucune force les unes sur les autres,

Admettons que le gaz est placé dans un champ gravitationnel uniforme de grandeur  $g$ . L'énergie totale du système est comme son nom l'indique, donnée par la somme des énergies. Il y en a de deux types : l'énergie cinétique de translation et l'énergie potentielle de gravité. Si  $E_k$  et  $E_p$  représentent respectivement ces deux grandeurs, alors l'énergie totale  $E$  s'obtient par

$$E = E_k + E_p$$

(1-11),

où

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \quad \text{et} \quad E_p = \sum_i m_i g z_i \quad (1-12)$$

où  $v_i$  et  $z_i$  représentent la grandeur de la vitesse et l'élévation de la  $i$ ème particule.

Si  $M$  désigne la masse totale du système et  $z_{CM}$  l'élévation de son centre de masse, alors on montre aisément que

$$E_p = \sum_i m_i g z_i = M g z_{CM} \quad (1-13)$$

Par ailleurs, en ce qui a trait à l'énergie cinétique du système, on observe qu'elle peut être considérée comme la somme de deux contributions.

$K_{CM}$  : l'énergie cinétique du système considéré comme un point matériel se déplaçant à la vitesse du centre de masse ( $v_{CM}$ )

$$K_{CM} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

$K_{int}$  : la somme des énergies cinétiques des particules mesurées relativement au centre de masse c'est-à-dire du fait de leur vitesse par rapport au centre de masse,  $v_{j/CM}$

$$K_{int} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{j/CM}^2$$

Alors

$$E_k = K_{CM} + K_{int} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{j/CM}^2 \quad (1-14)$$

Ainsi l'énergie totale s'écrit

$$E = \left( M g z_{CM} + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \right) + \sum_i m_i v_{j/CM}^2 \quad (1-15)$$

Le terme entre parenthèses est souvent désigné par le vocable d'énergie mécanique du système. Celle-ci peut être vue comme l'énergie qui serait celle du système si l'état réduit à un point matériel de masse  $M$  (masse ponctuelle). Le dernier terme de l'équation (1-15) constitue l'énergie interne  $U$  du gaz parfait. Un système comportant un grand nombre de particules, même s'il est au repos et n'est pas soumis à des forces externes (ici, la force de poids), possède de l'énergie en

raison des mouvements individuels des objets le constituant c'est son énergie interne. On considérera plus loin d'autres contributions à cette dernière. On peut donc écrire

$$\bar{E} = Mg z_{\text{CM}} + \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 + U \quad (1-16)$$

Nous avons vu précédemment que pour un gaz parfait comportant  $N$  particules, l'énergie cinétique de translation vaut

$$K_{\text{trans}} = \frac{3}{2} N k_B T \quad (1-17)$$

Puisque l'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique est seulement le fait de l'énergie de translation il s'ensuit que

$$U = \frac{3}{2} N k_B T \quad (1-18)$$

Ce résultat est fondamental car il montre que l'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique (l'hélium gazeux, par exemple) ne dépend que de sa température.

### 1.5.2 Énergie interne d'un gaz parfait diatomique

Considérons une molécule constituée de deux atomes (figure 1-13). Cet objet peut effectuer des rotations autour des axes A-A', B-B' et C-C'. À chacune de ces mouvements on peut associer une énergie cinétique de rotation  $K_{\text{rot}}$ . Bien que les forces intermoléculaires soient inexistantes les atomes constituant la molécule interagissent entre eux (comme deux masses reliées par un ressort) et ils vibrent le long de l'axe les joignant. On associera alors une énergie cinétique de vibration  $K_{\text{vib}}$  à la molécule et en raison de cette force, une énergie potentielle  $U_{\text{sp}}$ .

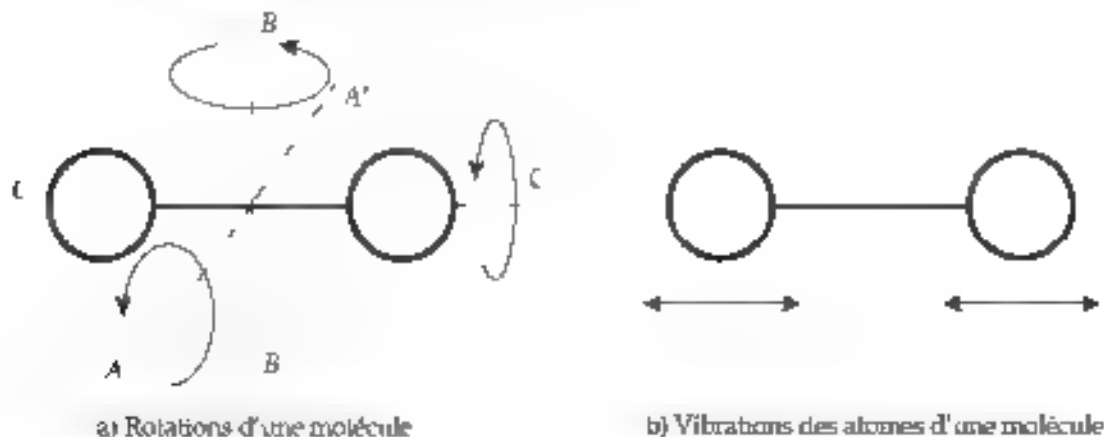


Figure 1-13 Modes de rotation et de vibration d'une molécule diatomique

Si la particule  $i$  possède les énergies  $K_{trans(i)}$ ,  $K_{rot(i)}$  et  $V_{int(i)}$ , alors l'énergie interne du gaz s'obtient en sommant ces contributions pour l'ensemble des molécules, c'est à-dire

$$U = \sum K_{trans(i)} + K_{rot(i)} + K_{vib(i)} + V_{int(i)}$$

La mécanique statistique montre que si la température est suffisamment élevée, chacun des termes de l'équation précédente est proportionnel à la température. Ainsi, on obtient le résultat que l'énergie interne est proportionnel à la température.

$$U \propto T \quad (1.19)$$

Le résultat (1.19) peut se généraliser au cas des molécules polyatomiques avec comme conséquence fondamentale que l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température.

### 1.5.3 Énergie interne d'une substance

Chaque molécule d'un gaz réel est soumise à un ensemble de forces intermoléculaires exercées par ses voisins. Elle possède en l'occurrence une énergie potentielle qui est la manifestation énergétique de l'action de ces forces. L'énergie interne totale sera alors donnée par la somme des énergies déjà considérées lors des discussions sur les gaz parfaits et de l'énergie potentielle d'interaction moléculaire. Comme les forces qui sont à l'origine de cette énergie potentielle sont de nature électrique, leur intensité va en décroissant avec la distance intermoléculaire. L'énergie potentielle d'interaction sera en conséquence dépendante du volume (ou de la pression). Ces dernières conclusions peuvent être étendues dans une bonne mesure aux cas des liquides et des gaz.

En conclusion, on peut les constater suivants. Les énergies de translation, de rotation et de vibration des molécules sont dépendantes de la température mais la présence de forces intermoléculaires dans une substance ajoute une contribution d'énergie potentielle d'interaction qui dépend du volume ou de la pression. L'énergie interne est donc, en général, fonction de la température et du volume. Puisqu'un gaz parfait est par définition exempt de forces intermoléculaires, son énergie interne ne dépend que de la température.

### 1.5.4 L'énergie interne comme variable thermodynamique

L'énergie interne que possède un système à un état donné est fonction de variables thermodynamiques. On conclue qu'elle doit elle-même être une variable d'état.

Comme l'énergie est par sa nature une grandeur additive (l'énergie du système  $A+B$ ) correspond à l'énergie de  $A$  + l'énergie de  $B$ ), il s'ensuit que l'énergie interne sera une variable extensive. La variable intensive associée sera donc l'énergie interne molaire définie par

$$v = \frac{v}{m} \quad \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right] \quad (1-20)$$

Rappelons que pour un mélange liquide-vapeur,  $u$  est donnée par

$$u = u_f + x u_g$$

A titre de variable thermodynamique, l'énergie interne massique permet de caractériser un état. La connaissance de  $T$  et  $u$  par exemple, permet de déterminer toute autre variable d'état intensive.

## 1.6 Équilibre thermique entre deux corps et principe zéro de la thermodynamique.

Imaginons que deux solides A et B) aux températures  $T_A$  et  $T_B$  respectivement soient mis en contact direct l'un avec l'autre. L'expérience montre qu'après un certain temps les températures des corps A et B seront égales. On dit alors que les deux corps sont en *équilibre thermique*. Si on veut effectuer l'expérience avec des gaz ou des liquides et qu'on veut éviter le mélange des substances, il faudra naturellement qu'ils soient séparés par une paroi. Une paroi qui permet l'établissement de l'équilibre thermique entre les corps est dite *diatherme*. En contrepartie, une paroi sera qualifiée d'*adiabatique* si la condition d'équilibre thermique n'est pas permise par cette paroi. En conséquence, la température de chaque corps sera indépendante de celle de son voisin.

Considérons maintenant la situation illustrée à la figure 1-14.

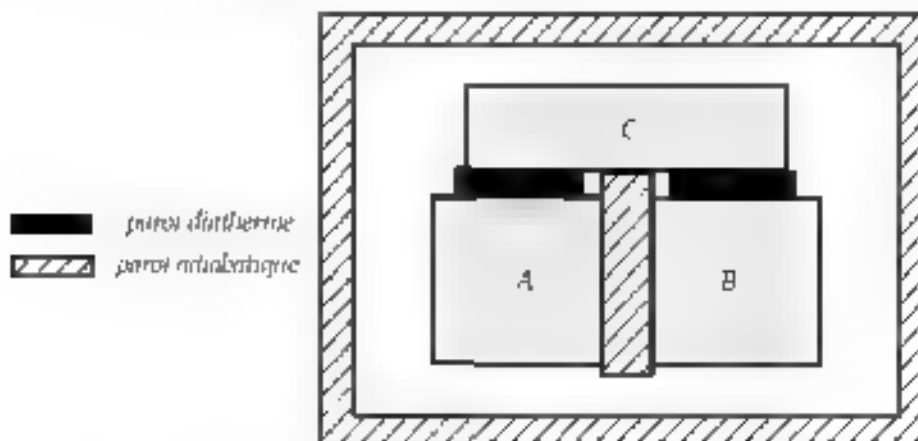


Figure 1-14 Principe zéro de la thermodynamique : trois corps en équilibre thermique

Les corps A, B et C sont enfermés dans une enceinte adiabatique. Les corps A et B sont séparés par une paroi adiabatique mais sont tous deux en contact thermique avec le corps C par le biais de parois diathermes. Puisqu'à l'équilibre chacun des corps A et B est en équilibre thermique avec le corps C ( $T_A = T_C$  et  $T_B = T_C$ ), il s'ensuit que A et B sont en équilibre thermique ( $T_A = T_B$ ). L'énoncé qui précède constitue le **principe zéro** de la thermodynamique et sert de base conceptuelle à l'utilisation des thermomètres.



## 1.7 EXERCICES

**Problème 1** Soit un ballon sphérique de 5 m de diamètre. Les conditions ambiantes sont de 100 kPa pour la pression et de 20 °C pour la température.

- a) Calculez la masse et le nombre de moles d'air ambiant que déplace le ballon.
- b) Si le ballon est rempli d'hélium à 100 kPa et à 20 °C, quels sont la masse et le nombre de moles d'hélium à l'intérieur du ballon ?

Rép. : a)  $n = 2,69 \text{ kmole}$  ;  $m = 77,8 \text{ kg}$

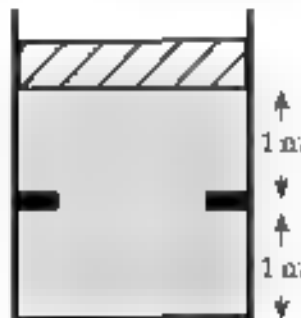
b)  $n = 2,69 \text{ kmole}$  ,  $m = 10,75 \text{ kg}$

**Problème 2** Un cylindre vertical fermé par un piston sans frottement contient de l'argon à 100 °C. Le piston a une masse de 5 kg et un diamètre de 100 mm, la pression ambiante est de 97 kPa. Si le volume du cylindre est de 2 L, quelle est la masse d'argon qui se trouve à l'intérieur ?

Rép.  $m = 2,66 \text{ g}$

**Problème 3** Un cylindre vertical fermé par un piston sans frottement et muni de butées contient de l'air. La section du piston est de  $0,1 \text{ m}^2$ . L'air initialement à 200 kPa et à 500 °C est refroidi par suite d'un échange de chaleur avec le milieu ambiant.

- a) Quelle est la température de l'air du cylindre au moment où le piston atteint les butées ?
- b) Si le refroidissement est poursuivi jusqu'à ce que la température atteigne 20 °C, quelle est la pression à l'intérieur du cylindre dans ce dernier état ?



$$\text{Rép. : a) } T_2 = 113,43^\circ\text{C} \quad \text{b) } P_3 = 151,7 \text{ kPa}$$

**Problème 4** Un réservoir rigide  $A$  de volume de  $0,1 \text{ m}^3$  est relié à un ballon sphérique et élastique  $B$ . On sait que la pression à l'intérieur du ballon est directement proportionnelle à son diamètre. Le réservoir et le ballon contiennent de l'air à la température ambiante de  $25^\circ\text{C}$ . À l'état initial, la pression dans le réservoir est de  $300 \text{ kPa}$  alors que le diamètre du ballon est de  $0,5 \text{ m}$  et sa pression intérieure de  $100 \text{ kPa}$ . On ouvre le robinet reliant  $A$  et  $B$  et on laisse l'équilibre s'établir. La température finale de l'air revient à  $25^\circ\text{C}$ . Déterminez la pression finale dans le système et le volume final du ballon.

$$\text{Rép. : } P_f = 136,7 \text{ kPa}$$

$$V_f = 0,167 \text{ m}^3$$

**Problème 5** Déterminez si il est raisonnable de supposer que la substance spécifiée se comporte comme un gaz parfait à l'état indiqué.

- |  |  |
|--|--|
| a) azote $T = 30^\circ\text{C}$ , $P = 3 \text{ MPa}$ ,            | d) eau $T = 50^\circ\text{C}$ , $P = 10 \text{ kPa}$ |
| b) dioxyde de carbone $T = 30^\circ\text{C}$ , $P = 3 \text{ MPa}$ | e) eau $T = 30^\circ\text{C}$ , $P = 10 \text{ kPa}$ |
| c) eau $T = 1300^\circ\text{C}$ , $P = 3 \text{ MPa}$              |  |

$$\text{Rép. : a) oui} \quad \text{b) non} \quad \text{c) oui} \quad \text{d) oui} \quad \text{e) non}$$

**Problème 6** Déterminez si, dans pour les états suivants : eau est un liquide comprimé (L), une vapeur surchauffée (V) ou un mélange liquide-vapeur (L-V).

- |  |   |  |
|--|---|--|
| a) $T = 120^\circ\text{C}$ , $P = 150 \text{ kPa}$   | b) $P = 0,35 \text{ MPa}$ , $v = 0,4 \text{ m}^3/\text{kg}$     | c) $T = 160^\circ\text{C}$ , $v = 0,4 \text{ m}^3/\text{kg}$ |
| d) $P = 200 \text{ kPa}$ , $T = 110^\circ\text{C}$ , | e) $T = 300^\circ\text{C}$ , $v = 0,01 \text{ m}^3/\text{kg}$ , | f) $P = 5 \text{ kPa}$ , $T = 10^\circ\text{C}$ .            |

$$\text{Rép. : a) V,} \quad \text{b) L-V;} \quad \text{c) V;} \quad \text{d) L;} \quad \text{e) L-V,} \quad \text{f) L,}$$



**Problème 7** Pour chacune des substances suivantes et chacun des états indiqués, déterminez le titre si la substance est saturée, ou la température dans le cas de vapeur surchauffée.

- a) ammoniac : i)  $T = 70\text{ °C}$ ,  $v = 0,1\text{ m}^3/\text{kg}$ , ii)  $P = 800\text{ kPa}$ ,  $v = 0,2\text{ m}^3/\text{kg}$   
 b) R. 134a : i)  $P = 400\text{ kPa}$ ,  $x = 0,04\text{ m}^3/\text{kg}$ , ii)  $P = 400\text{ kPa}$ ,  $x = 0,060\text{ m}^3/\text{kg}$   
 c) eau : i)  $T = 20\text{ °C}$ ,  $v = 1\text{ m}^3/\text{kg}$ ; ii)  $P = 8\text{ MPa}$ ,  $v = 0,01\text{ m}^3/\text{kg}$

Rép. a) i)  $x = 0,666$  ii)  $T = 71,3\text{ °C}$   
 b) i,  $x = 0,782$  ii)  $T = 43,4\text{ °C}$   
 c) i,  $x = 0,0173$  ii)  $x = 0,3892$

**Problème 8** Calculez le volume massique pour chacun des états suivants.

- a) ammoniac  $T = 30\text{ °C}$ ,  $x = 0,15$   
 b) R. 134a  $T = 48\text{ °C}$ ,  $x = 0,8$   
 c) eau  $P = 8\text{ MPa}$ ,  $x = 0,92$

Rép. a)  $v = 0,018\text{ m}^3/\text{kg}$  b)  $v = 0,0129\text{ m}^3/\text{kg}$  c)  $v = 0,0217\text{ m}^3/\text{kg}$

**Problème 9** Un réservoir rigide de  $0,1\text{ m}^3$  contient des volumes égaux de liquide et de vapeur de fréon 134a à  $34\text{ °C}$ . On doit y introduire du fréon additionnel jusqu'à ce que la masse soit de  $80\text{ kg}$ .

- a) Quelle masse aura-t-on fait pénétrer dans le réservoir au cours de l'opération ?  
 b) Si la température finale est de  $34\text{ °C}$ , quel sera le volume final de liquide dans le réservoir ?

Rép. a)  $\Delta m = 19,26\text{ kg}$  b)  $V_f = 0,0670\text{ m}^3$

**Problème 10** Le réservoir A a un volume de 100 L et contient du R-134a à 20 °C. 10% du volume est alors occupé par du liquide et le reste par de la vapeur. Initialement, le réservoir B est vide. Le robinet reliant les réservoirs est ouvert et, au bout d'un moment, l'équilibre s'établit aux conditions de 20 °C et 200 kPa. Quel est le volume du réservoir B ?

Rép. :  $V_B = 1,583 \text{ m}^3$

**Problème 11** Un système piston-cylindre contient du R-134a initialement à 400 kPa, 40 °C et occupant un volume de 0,025 m<sup>3</sup> (état 1). Le fréon est refroidi à volume constant jusqu'à -25 °C (état 2) puis chauffé à pression constante jusqu'à ce que le volume double.

- Calculez la masse du fréon.
- Pour l'état final (état 3), déterminez les variables suivantes :  $P$ ,  $T$  et  $x$  (s'il y a lieu).
- Illustrez toute l'évolution sur des diagrammes  $P$ - $v$  et  $T$ - $v$ .

Rép. : a)  $m = 0,423 \text{ kg}$

b)  $P_3 = 102,0 \text{ kPa}$ ,  $T_3 = -26^\circ\text{C}$ ,  $v_3 = 0,118 \text{ m}^3/\text{kg}$ ,  $x_3 = 0,627$

**Problème 12** 1 kg d'eau (H<sub>2</sub>O) est initialement à 200 °C et occupe un volume de 0,1 m<sup>3</sup> (état 1). Il est refroidi lors d'une évolution à volume constant jusqu'à ce que la pression atteigne 100 kPa (état 2) puis il est chauffé à pression constante jusqu'à 150 °C (état 3).

- Pour l'état 2, déterminez  $T$ ,  $v$  et  $x$  (s'il y a lieu).
- Pour l'état 3, déterminez  $P$ ,  $v$  et  $x$  (s'il y a lieu).
- Illustrez toute l'évolution dans des diagrammes  $P$ - $v$  et  $T$ - $v$ .

Rép. : a)  $T_2 = 99,6^\circ\text{C}$ ,  $x_2 = 0,0584$ ,  $v_2 = 0,1 \text{ m}^3/\text{kg}$

b)  $P_3 = 100 \text{ kPa}$ ,  $T_3 = 150^\circ\text{C}$ ,  $v_3 = 1,9364 \text{ m}^3/\text{kg}$

## CHAPITRE 2

## LE PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

## Table des matieres

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2.2</b>	<b>Travail</b>	<b>4</b>
2.2.1	Travail d'expansion	4
2.2.2	Remarques supplémentaires sur le travail	8
2.2.3	Exemples de calcul de travail d'expansion	9
2.2.3.1	Évolution isobare	9
2.2.3.2	Évolution $PV = \text{cte}$	9
2.2.3.3	Évolution polytropique	10
2.2.3.4	Travail effectué contre la force exercée par un ressort et la pression atmosphérique	12
<b>2.3</b>	<b>La chaleur</b>	<b>14</b>
<b>2.4</b>	<b>Premier principe de la thermodynamique</b>	<b>16</b>
2.4.1	Importance du chemin dans le calcul de la chaleur	18
<b>2.5</b>	<b>Enthalpie</b>	<b>19</b>
<b>2.6</b>	<b>Chaleurs spécifiques</b>	<b>21</b>
<b>2.7</b>	<b>1'application du premier principe aux gaz parfaits</b>	<b>22</b>
<b>2.8</b>	<b>Les systèmes en écoulement stationnaire.</b>	<b>24</b>
2.8.1	Équation de continuité	25
2.8.2	Équation d'énergie	25
<b>2.9</b>	<b>EXERCICES</b>	<b>27</b>



## 2.1 Introduction

La conservation de l'énergie mécanique d'un corps rigide était un fait pratiquement établi au début du XIX<sup>e</sup> siècle. Mais c'est grâce aux contributions de Mayer et tout particulièrement de Joule que ce principe s'est généralisé aux systèmes thermodynamiques (vers 1840). Aujourd'hui le principe de conservation d'énergie a acquis une reconnaissance telle qu'il constitue une exigence que toute nouvelle théorie physique doit satisfaire pour être prise au sérieux. Comme il a d'abord été énoncé dans le contexte de la thermodynamique, ce principe a été appelé « premier principe de la thermodynamique ». Son champ d'application s'étend, on le sait maintenant à tous les domaines de la physique.

À proprement parler, l'énergie d'un système n'est conservée que si celui-ci est isolé. Énoncer ce fait est équivalent à dire que l'énergie ne peut être produite ou détruite. Elle peut toutefois être transformée sous une autre forme. À titre d'exemple, un corps tombant dans le champ gravitationnel terrestre transforme une portion de son énergie potentielle en énergie cinétique. Si un système interagit avec son environnement, son énergie peut être appelée à changer. Comme l'énergie ne peut être générée ou détruite, il s'ensuit que l'augmentation (ou la diminution) de celle-ci est le résultat d'un transfert de l'environnement vers le système (ou vice-versa). Si  $E_i$  et  $E_f$  représentent les énergies du système aux états initial et final et  $\Delta E_{\text{trans}}$  l'énergie transférée de l'environnement vers le système, alors ce qui précède s'exprime mathématiquement par

$$E_f - E_i = \Delta E_{\text{trans}}$$

Il existe deux modes de transfert énergétique : le *travail* et la *chaleur*. Considérons un gaz parfait dans un cylindre fermé par un piston, l'ensemble étant entouré de parois adiabatiques (fig. 2.1 a). Si le piston est déplacé de façon à comprimer le gaz, on observe une élévation de la température, c'est-à-dire (voyez la section 1.6) une augmentation de l'énergie interne du gaz. Le transfert d'énergie s'est effectué par le biais de travail.

Considérons maintenant la situation illustrée à la figure 2.1b. Deux gaz parfaits enfermés dans une enceinte rigide adiabatique sont séparés par une paroi rigide diatherme. Supposons qu'initialement la température du corps A soit plus élevée que celle du corps B. On sait qu'éventuellement les deux températures s'égaliseront à une valeur intermédiaire comprise entre les valeurs initiales. L'augmentation de la température du gaz B traduit donc une augmentation de son énergie interne, alors que la diminution de la température du gaz A implique que son énergie interne a décroît. On parlera en l'occurrence de transfert énergétique (de A vers B) sous forme de chaleur.



Figure 2.1 Illustration des transferts d'énergie sous forme de travail et de chaleur

## 2.2 Travail

Quand un agent extérieur au système exerce une force sur une des parties du système et que le point d'application de cette force se déplace, on dit qu'un travail est effectué par la force. Un grand nombre d'interactions entre le système et son environnement peuvent ainsi être considérées comme du travail. A titre d'exemples, on peut penser à

la dilatation ou la compression d'un système sous l'effet de forces externes (étirement d'un fil ou compression d'un gaz, par exemple),

la rotation d'un arbre dans un fluide (turbine hydraulique, par exemple),

la polarisation d'une substance sous l'effet d'un champ électrique (oscillation des dipôles des molécules d'eau dans un four micro-ondes, par exemple)

l'aimantation d'un corps (dans le cas d'une bande magnétique, par exemple)

Par définition, le travail (ainsi que la chaleur) est un mode de transfert énergétique entre le système et son environnement. L'énergie doit traverser les frontières définissant les deux. Ainsi, les forces qui s'exercent entre différentes composantes du système bien qu'elles donnent lieu à une redistribution de l'énergie entre ces composantes ne produisent pas de travail. Si on voulait considérer ces forces et leur action en tant que transfert d'énergie, il faudrait redéfinir les limites du système.

La convention de signe pour le travail la plus usuelle en ingénierie est la suivante

Si sous l'effet d'un travail, l'énergie est transférée du système vers l'environnement, on dira que le travail est positif ( $W > 0$ ). On dira aussi que le système fait un travail sur l'environnement.

En contrepartie si l'énergie transite de l'environnement vers le système (l'environnement fait un travail sur le système), alors le travail sera considéré négatif ( $W < 0$ ).

### 2.2.1 Travail d'expansion

En thermodynamique, une classe de travail est d'importance particulière : le travail effectué par le système lorsqu'il se dilate (ou se comprime) sous l'effet de forces agissant sur ses frontières. Deux conditions doivent être réunies en l'occurrence

- 1) une force externe doit agir sur la frontière du système
- 2) le point d'application de la force doit se déplacer (c'est-à-dire que la frontière doit se déformer)

Si l'une ou l'autre de ces conditions n'est pas satisfaite, aucun travail n'est effectué. La figure 2.2 illustre deux exemples d'évolutions pour lesquelles le travail est nul.

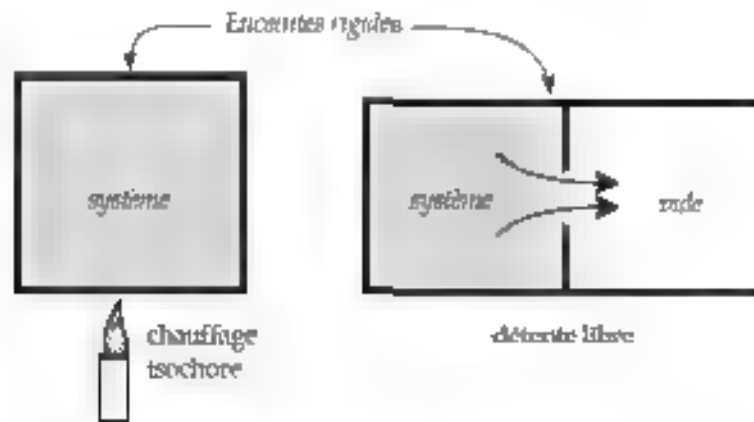
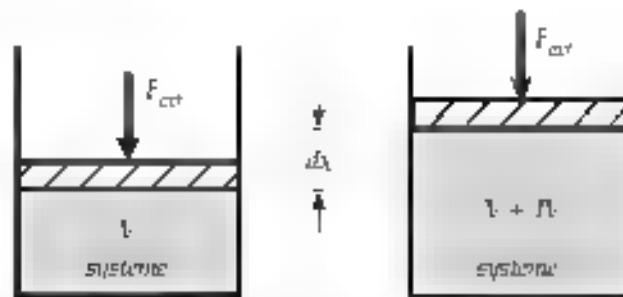


Figure 2.2 Deux exemples d'évolutions sans travail

A la gauche, a été illustrée la situation où un système ne peut se déformer (évolution isochore). Même si celui-ci est soumis à des forces sur sa frontière (pression exercée par la paroi), aucun travail n'est effectué. A la droite de la figure 2.2, une enceinte rigide est séparée en deux parties par une paroi. Le système est contenu dans une région, alors que l'autre est vide. Quand la paroi est percée, le système se dilate pour occuper tout le volume. Toutefois, comme aucune force ne s'exerce sur la frontière de droite (la frontière en mouvement), le travail est encore nul.

#### Calcul du travail d'expansion

Le cylindre de la figure 2.3 est fermé par un piston sans masse de surface  $A$ .

Figure 2.3 Travail effectué lorsque le système connaît une expansion de  $V$  à  $V + dV$ 

Pendant que le volume du système passe de  $V$  à  $V + dV$ , le système effectue un travail car il doit combattre la force exercée par l'environnement  $F_{ext}$  pour déplacer le piston. Le travail infinitésimal  $\delta W$  sera alors

$$\delta W = F_{ext} dx \quad (2-1)$$

La force  $F_{ext}$  est assimilable à une pression,  $P_{ext}$ , qui agirait sur le piston de sorte que (2-1) peut s'écrire

$$\delta W = P_{ext} (A dx) \quad (2-2)$$

avec :

$$F_{ext} = P_{ext} A$$

alors

$$\delta W = P_{ext} dV$$

Si les états initial (1) et final (2) du système sont macroscopiquement distincts (les variables thermodynamiques connaissent une variation finie plutôt qu'infinitésimale), alors le travail total sera obtenu en sommant les travaux infinitésimaux

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 P_{ext} dV \quad (2-3)$$

Bien qu'avant été démontrées à l'aide du dispositif de la figure 2.3, les relations (2-2) et (2-3) sont tout à fait générales et s'appliquent à toute évolution d'un système connaissant une expansion (ou une compression), quelle que soit sa géométrie. Par ailleurs, aucune condition n'est imposée quant à la nature de  $F_{ext}$  (ou de  $P_{ext}$ ). Si, à titre d'exemple, le piston était doté d'une masse et que le déplacement de celui-ci se faisait en combattant à la fois la pression atmosphérique et une force de frottement  $F_f$ , alors  $F_{ext}$  serait

$$F_{ext} = m_{piston} g + F_f + P_{atm} A$$

et  $P_{ext}$  se calculerait par

$$P_{ext} = \frac{F_{ext}}{A} = \frac{m_{piston} g + F_f}{A} + P_{atm}$$

Remarquons finalement qu'aucune contrainte n'a été imposée sur la façon que le système passe d'un état à l'autre. L'évolution peut être contrôlée ou non, quasi statique ou non. La seule grandeur pertinente est la force totale  $F_{ext}$  exercée par l'environnement sur la frontière du système (ou, de façon équivalente la « pression » totale  $P_{ext}$ ).

Dans le cas particulier d'une évolution quasi statique, toutefois, le résultat (2-3) prend une forme différente qui la rend attrayante. Comme une évolution quasi statique est constituée d'une suite d'états d'équilibre et que pour chacun de ceux-ci la condition d'équilibre mécanique doit prévaloir, on peut écrire:

$$P_{ext} = P$$

où  $P$  (sans indice) correspond à la pression du système. Les relations (2-2) et (2-3) deviennent, alors

$$\delta W = P dV \quad (2-4)$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 P dV \quad (2-5)$$



Si l'évolution est alors représentée sur un diagramme  $P-V$ , on constate que l'aire sous la courbe de l'évolution correspond au travail effectué (figure 2.4)

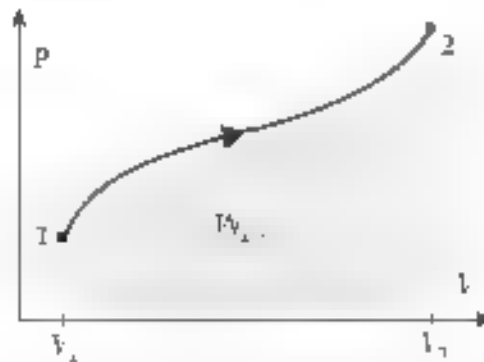


Figure 2.4 Représentation graphique du travail.

Notons qu'une évolution d'expansion (déplacement vers la droite sur le diagramme  $P-V$ ) donne lieu à un travail positif alors qu'une évolution de compression (déplacement vers la gauche sur le diagramme  $P-V$ ) correspond à un travail négatif.

Une évolution cyclique apparaîtra comme une courbe fermée dans un diagramme  $P-V$  ainsi que dans tout autre diagramme d'ailleurs). Le travail total effectué, le travail net  $W_{net}$ , correspondra alors à la surface intérieure délimitée par la courbe (figure 2.5)

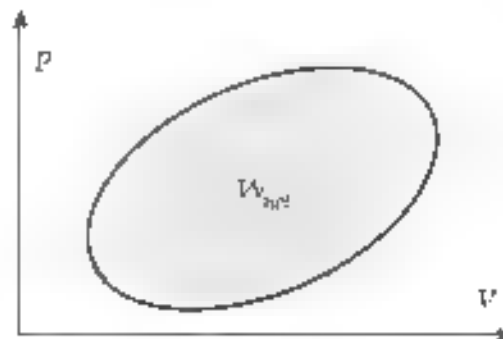


Figure 2.5 Travail net effectué lors d'un cycle

On constate aisément que si la courbe est parcourue dans le sens horaire, le travail net est positif (fait par le système), et que si elle est parcourue dans le sens antihoraire, le travail net est négatif (fait par l'environnement).

### 2.2.2 Remarques supplémentaires sur le travail

A la figure 2.6 sont illustrées deux évolutions (A et B) joignant les mêmes points initial et final.

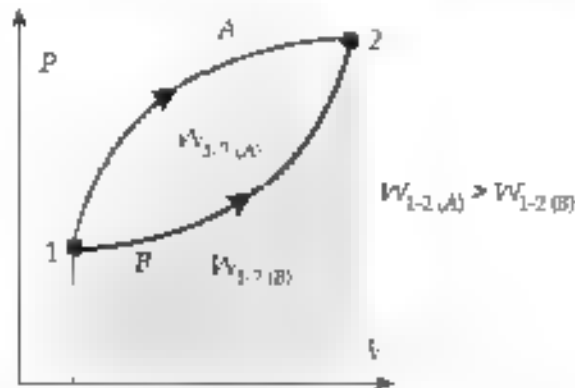


Figure 2.6 Le travail dépend du chemin emprunté

On voit d'emblée que les travaux effectués dans les deux cas diffèrent. En fait

$$W_{1-2(A)} > W_{1-2(B)}$$

On dit alors que la grandeur du travail dépend du chemin emprunté (c'est-à-dire qu'il dépend du processus qui amène le système de l'état 1 à l'état 2). En contrepartie, les variations de pression ou de volume sont toujours les mêmes quel que soit le chemin. Ce qui précède montre que le travail n'est pas une propriété du système mais qu'il dépend du type d'interaction entre le système et son environnement. C'est d'ailleurs ce qui explique la différence dans le formalisme utilisé pour désigner les infinitésimaux associés au travail : d'une part,  $\delta W$  et aux variables d'état d'autre part,  $dV$ ,  $dP$ ,  $dT$  etc.

Pour représenter une variation infinitésimale de volume on écrit  $dV$  et la somme de ces infinitésimaux ('intégrale') donnera une variation de volume finie

$$\int_V dV = V_2 - V_1$$

Ce type de différentielle est dénommée *différentielle exacte* car son intégrale donne toujours le même résultat quel que soit le chemin emprunté. Pour désigner une grandeur infinitésimale de travail, on écrit plutôt  $\delta W$  pour marquer la distinction entre ce type de différentielle et la différentielle exacte. Alors

$$\int_1^2 \delta W = W_2 - W_1 = W$$

## 2.2.3 Exemples de calcul de travail d'expansion

### 2.2.3.1 Évolution isobare

Une évolution isobare est caractérisée par  $P = \text{cte}$  durant toute l'évolution.

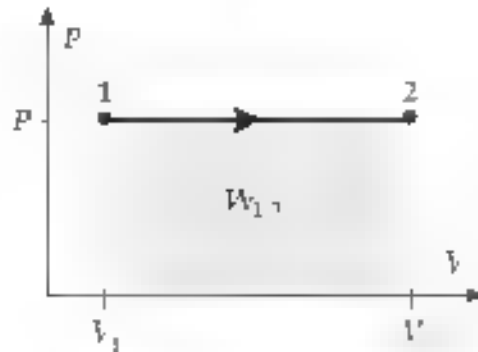


Figure 2.7 Travail effectué lors d'une évolution isobare

$$W_{1,2} = \int_{V_1}^{V_2} P dV = P (V_2 - V_1) \quad (2-6)$$

### 2.2.3.2 Évolution $PV = \text{cte}$

Désignons la constante par  $a$

$$PV = a \Rightarrow P = \frac{a}{V}$$

La figure 2.8 illustre la dépendance de la pression en fonction du volume ainsi que le travail effectué.

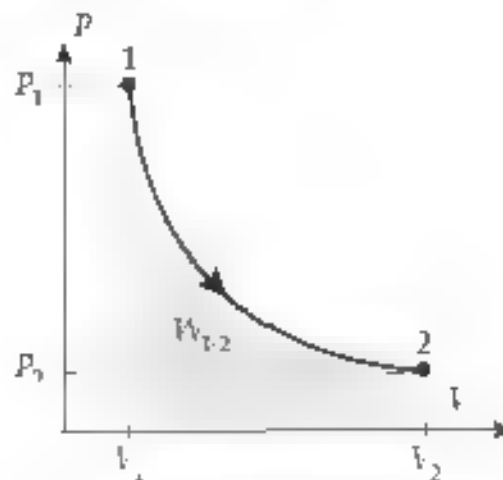


Figure 2.8 Travail effectué lors d'une évolution  $PV = \text{cte}$

Ainsi 
$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \frac{n}{V} dV = n \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Or 
$$P V_1 = P V_2 = n$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = P_1 V_1 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = P_2 V_2 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \quad (2-7)$$

Et, de plus, la substance est un gaz parfait

$$PV = nRT = cte \quad (\text{évolution isotherme})$$

alors

$$W_{1 \rightarrow 2} = nRT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \quad (2-8)$$

### 2.2.3.3 Évolution polytropique

Une évolution polytropique est caractérisée par la relation suivante entre la pression et le volume

$$P V^n = cte$$

Et  $b$  est cette constante

$$P = b V^{-n}$$

Notons qu'on ne peut *a priori* se représenter graphiquement l'évolution puisque son allure dépendra de  $n$ . La figure 2.9 illustre deux évolutions de ce type avec  $n = 2$  et  $n = -2$ , respectivement.

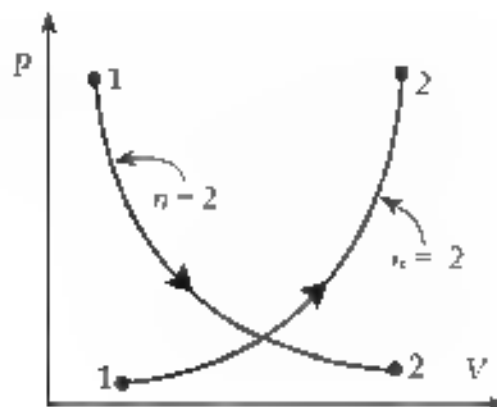


Figure 2.9 Deux évolutions polytropiques avec  $n = 2$  et  $n = -2$

L'équation (2-5) conduit à

$$W_{1,2} = b \left[ \frac{V_2^{1-\eta} - V_1^{1-\eta}}{1-\eta} \right]$$

mais puisque

$$b = P_1 V_1^\eta = P_2 V_2^\eta,$$

on trouve

$$W_{1,2} = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1-\eta} \quad (2-9)$$

Si de plus la substance est un gaz parfait,

$$P_1 V_1 = nRT_1 \quad P_2 V_2 = nRT_2$$

$$W_{1,2} = nR \left[ \frac{T_2}{1-\eta} - \frac{T_1}{1-\eta} \right] \quad (2-10)$$

Pour un gaz parfait connaissant une évolution polytropique, on peut d'ailleurs établir une paire de relations utiles.

On sait que

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad (\text{gaz parfait})$$

et que

$$\frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\eta \quad (\text{évolution polytropique})$$

Ainsi

$$\left( \frac{V_2}{V_1} \right) \left( \frac{T_2}{T_1} \right) = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\eta$$

C'est-à-dire

$$\Rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\eta \quad (2-11)$$

De plus

$$\frac{P_1}{P_2} = \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^\eta \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^\eta$$

Alors

$$\Rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1}^{1/\eta} \quad (2-12)$$

### 2.2.3.4 Travail effectué contre la force exercée par un ressort et la pression atmosphérique

On sait que la force exercée par un ressort (idéal) est proportionnelle à la déformation  $x$  du ressort

$$F = kx \text{ avec } x = l - l_0$$

où  $l$  : longueur du ressort

$l_0$  : longueur au repos du ressort (lorsqu'il est ni étiré ni comprimé)

Considérons un système placé sous un piston de surface  $A$  aux deux états suivants (figure 2.10)

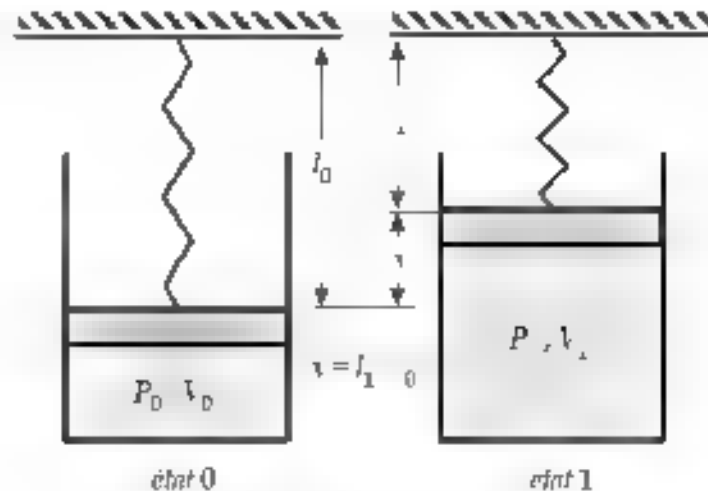


Figure 2.10 Action d'un ressort sur un piston

L'état 0 est l'état pour lequel le ressort n'agit pas c'est-à-dire pour lequel  $x = 0$ . La pression du système correspond alors à la pression atmosphérique  $P_0$ . Désignons par  $V_0$ , le volume à cet état. Si le système se dilate et est amené à l'état 1, le ressort est comprimé et exerce une force sur le piston donnée par

$$F = k(l - l_0) = +k \left( l - \frac{V_0}{A} \right)$$

Cette force contribue à augmenter la pression du système qui vaut maintenant

$$P_1 = P_0 + \frac{F_{\text{ressort}}}{A}$$

$$P_1 = P_0 + \frac{k}{A^2} (V_1 - V_0)$$

Comme l'état 1 est quelconque, on peut écrire en général

$$P = P_0 + \frac{k}{A^2} (V - V_0) \quad (2.13)$$

La figure 2.11 représente une évolution de ce type sur un diagramme  $P-v$ .

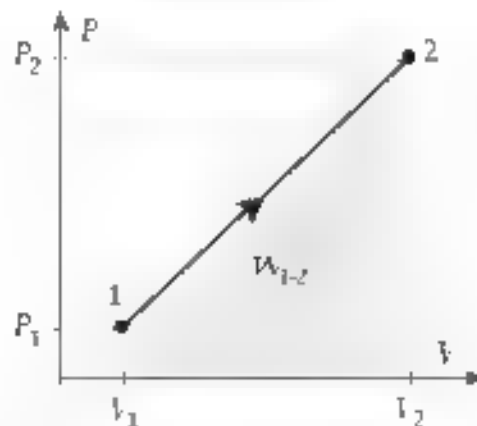


Figure 2.11 Travail effectué lors d'une évolution linéaire

En conséquence, le travail effectué entre les états 1 et 2 (figure 2.11) s'obtient par

$$W_{1-2} = \int_{v_1}^{v_2} \left( P_0 + \frac{k}{A^2} (v - v_0) \right) dv$$

$$W_{1-2} = \left( \frac{P_1 + P_2}{2} \right) (v_2 - v_1) \quad (2-14)$$

**Exemple 2.1** Un ensemble cylindre-piston contient 4 kg d'eau à 35 °C et occupant un volume de 40 L. À cet état, le piston repose sur des butées. Le piston a une aire de 0,06 m<sup>2</sup> et une masse telle qu'il faut une pression de 300 kPa pour le soulever à la pression ambiante. Lorsque le piston est soulevé jusqu'à un point où le volume est de 75 L, il rencontre un ressort de constante  $k = 400 \text{ kN/m}$ . Si on chauffe le système jusqu'à ce que la pression finale atteigne 7 MPa, déterminez

- les variables de l'état final :  $v_4$ ,  $T_4$
- le travail effectué pendant l'évolution.

*Solution*

évolution 1-2 : isochore ;  $V = \text{cte}$  (jusqu'à  $P_2 = 300 \text{ kPa}$ )

évolution 2-3 : isobare  $P = \text{cte}$  (jusqu'à  $V_3 = 75 \text{ L}$ )

évolution 3-4  $P = P_0 + \frac{k}{A^2} (V - V_0)$  (jusqu'à  $P_4 = 7 \text{ MPa}$ )

État 1	État 2	État 3	État 4
$V_1 = 30 \text{ L}$	$V_2 = 30 \text{ L}$	$V_3 = 75 \text{ L}$	$V_4 = 142 \text{ L}$
$T_1 = 35^\circ\text{C}$	$T_2 = 133,55^\circ\text{C}$	$T_3 = 133,55^\circ\text{C}$	$T_4 = 352,8^\circ\text{C}$
$P_1 = 5,6 \text{ kPa}$	$P_2 = 300 \text{ kPa}$	$P_3 = 300 \text{ kPa}$	$P_4 = 7 \text{ MPa}$
$v_1 = 0,0075 \text{ m}^3/\text{kg}$	$v_2 = 0,0075 \text{ m}^3/\text{kg}$	$v_3 = 0,01875 \text{ m}^3/\text{kg}$	$v_4 = 0,0355 \text{ m}^3/\text{kg}$

a) Sachant que l'évolution 3-4 est une évolution linéaire avec ressort

$$P_4 = P_3 + \frac{k}{A^2} (V_4 - V_3)$$

On trouve  $V_4$

$$V_4 = \frac{P_4 - P_3}{\frac{k}{A^2}} + V_3 = 142 \text{ L}$$

et  $v_4 = 0,03555 \text{ m}^3/\text{kg} > v_g(7 \text{ MPa})$  (vapeur surchauffée)

Alors,  $T_4 = 352,8^\circ\text{C}$

b)  $W_{1-4} = W_{1-2} + W_{2-3} + W_{3-4}$

$$W_{1-2} = 0 \quad (\text{isochore})$$

$$W_{2-3} = P (V_3 - V_2) = 13,5 \text{ kJ} \quad (\text{isobare})$$

$$W_{3-4} = \frac{(P_3 + P_4)}{2} (V_4 - V_3) = 244,55 \text{ kJ} \quad (\text{ressort})$$

Et  $W_{1-4} = 258,1 \text{ kJ}$

## 2.3 La chaleur

Nous avons vu antérieurement qu'il existe une autre façon de fournir de l'énergie à un système : par chaleur. On considère généralement qu'il existe trois modes de transfert de chaleur : la conduction thermique, la convection et la radiation. Si il existe une différence de température entre deux points d'un milieu, l'agitation thermique plus importante de la partie à haute température se transmettra de proche en proche à la région de basse température, c'est le



phénomène de conduction. Si cette différence de température existe dans un milieu fluide, le phénomène de conduction s'accompagne souvent de déplacements de matière au sein du fluide, des « courants ». Ce transport de matière s'accompagne de transfert d'énergie qui s'effectue de la région à plus haute température vers la région de température inférieure : on parle alors de convection. Finalement tout corps porté à une certaine température émet du rayonnement électromagnétique : c'est le phénomène de radiation. Une caractéristique commune aux trois modes de transfert de chaleur est le fait que l'énergie voyage toujours de la région de plus haute température vers la région de plus basse température. Cette observation peut servir de définition opérationnelle pour la chaleur : si de l'énergie traverse les frontières d'un système en raison d'une différence de température entre celui-ci et son environnement, alors il y a transfert de chaleur. La convention de signe associée au transfert de chaleur stipule que de l'énergie absorbée par le système correspond à une chaleur positive  $Q > 0$ . La chaleur rejetée par le système vers l'environnement sera donc considérée négative,  $Q < 0$ .

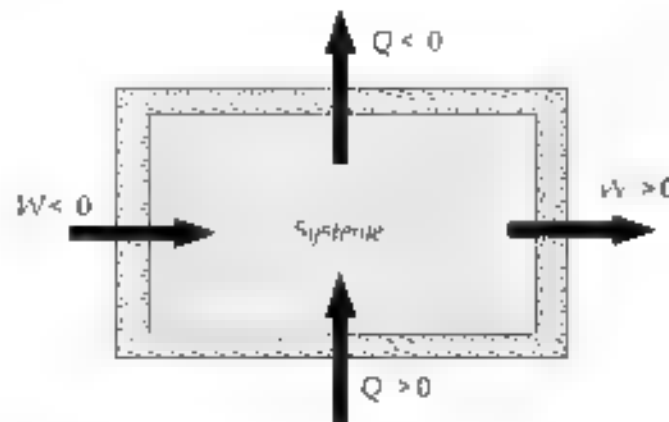


Figure 2.12 Conventions de signes pour le travail et la chaleur

Nous montrerons par la suite qu'à l'instar du travail, la quantité de chaleur absorbée (ou rejetée) est dépendante du processus faisant évoluer le système de son état initial vers son état final (dépendance du chemin). La chaleur infinitésimale s'écrit alors  $\delta Q$ , et on aura pour la chaleur totale,  $Q_{1,2}$

$$Q_{1,2} = \int \delta Q \quad (2.15)$$

Si l'évolution est cyclique, la chaleur nette transférée s'écrit donc

$$Q_{\text{net}} = \oint \delta Q \quad (2.16)$$

Finalement, on dira d'une évolution qu'elle est adiabatique si elle s'effectue sans transfert de chaleur ( $Q_{1,2} = 0$ )

## 2.4 Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique (principe de conservation d'énergie) postule que lorsqu'un système change d'état, son énergie ne peut être modifiée que par un apport d'énergie provenant de son environnement. Les modes de transfert énergétiques sont le travail et la chaleur, et en vertu des conventions de signes qu'on leur a assignées, on aura

$$E_2 - E_1 = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} \quad (2-17)$$

Pour une évolution cyclique, les états initial et final sont les mêmes ( $E_1 = E_2$ ) et on tire

$$Q_{\text{net}} = W_{\text{net}} \quad (2-18)$$

Au chapitre 1 on a vu que l'énergie totale,  $E$ , est souvent représentée comme une somme de trois termes

$$E = mgz_{\text{CM}} + \frac{1}{2} m V_{\text{CM}}^2 + U$$

Pour la majorité des applications en thermodynamique, les variations d'énergie potentielle de gravité et d'énergie cinétique associée au déplacement du centre de masse sont nulles ou négligeables. Le premier principe s'écrit alors :

$$U_2 - U_1 = Q_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} \quad (2-19)$$

Toutes les grandeurs de l'équation (2-19) sont proportionnelles à la masse du système (variables extensives) : on peut donc diviser de part et d'autre par la masse pour obtenir

$$u_2 - u_1 = q_{1 \rightarrow 2} - w_{1 \rightarrow 2} \quad (2-20)$$

où :

$$u = \frac{U}{m} \quad (\text{énergie interne massique})$$

$$q_{1 \rightarrow 2} = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{m} \quad (\text{chaleur massique})$$

$$w_{1 \rightarrow 2} = \frac{W_{1 \rightarrow 2}}{m} \quad (\text{travail massique})$$

Dans le cas d'une évolution infinitésimale, c'est-à-dire lorsque les états sont infinitésimalement proches l'une de l'autre, le premier principe prend les formes suivantes

$$dU = \delta Q - \delta W \quad (2-21)$$

$$du = \delta q - \delta w \quad (2-22)$$

Dans certains cas il est utile d'établir le taux de variation de l'énergie du système,  $dU/dt$ . Si l'évolution infinitésimale considérée plus haut prend  $dt$  pour s'accomplir alors

$$\frac{dU}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q}{\delta t} + \frac{\delta W}{\delta t}$$

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} \quad (2-23)$$

$\dot{Q}$  : taux de transmission de chaleur (équivalent à une puissance)

$\dot{W}$  : puissance

**Exemple 2.2:** Un réservoir rigide est divisé en deux parties égales par une membrane (figure 2.13). Initialement la partie A du réservoir contient 10 kg d'eau à 300 kPa et 20 °C l'autre moitié étant évacuée. La membrane est alors enlevée et l'eau emplit tout le réservoir. Si l'eau revient à sa température initiale de 20 °C déterminez

- le volume du réservoir,
- la pression finale,
- le transfert de chaleur pour ce processus



Figure 2.13 Exemple 2.2

*Solution*

On constate détente libre, donc  $W_{ex} = 0$

a)

$$\text{État 1} \quad \begin{cases} P = 300 \text{ kPa} \\ T = 20 \text{ °C} \end{cases} \quad P_1 > P_s (20 \text{ °C}), \text{ l'eau est à l'état de liquide comprimé.}$$

$$v_1 = v_f(20 \text{ °C}) = 0,001002 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$V = m v = 0,010 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{réservoir}} = V = 2V_1 = 0,020 \text{ m}^3$$

b)

$$v = \frac{V}{m} = 0,002 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$\text{État 2} \begin{cases} T_2 = 20^\circ\text{C} \\ v_2 = 0,002 \text{ m}^3/\text{kg} \end{cases}, \quad v_f < v_2 < v_g, \text{ l'eau est un mélange liquide-vapeur}$$

$$\text{Donc} \quad P_2 = P_1 = 20^\circ\text{C} = 2,339 \text{ kPa}$$

$$\text{c) Transport de chaleur} \quad Q_{1 \rightarrow 2} = m(u_2 - u_1) + W_{1 \rightarrow 2}$$

$$u_1 = u(20^\circ\text{C}) = 83,95 \text{ kJ/kg}$$

$$u_2 = u_f + x_2 u_g$$

$$\text{Calcul du titre :} \quad x_2 = \frac{(v_2 - v_f)}{(v_g - v_f)} = 0,00002$$

$$\text{et} \quad u_2 = 83,99 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{Puisque} \quad W_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{1 \rightarrow 2} = m(u_2 - u_1)$$

$$Q_1 = 10(83,99 - 83,95) = +0,4 \text{ kJ}$$

Le système a reçu 0,4 kJ

### 2.4.1 Importance du chemin dans le calcul de la chaleur.

Plus haut nous avons fait mention de la dépendance de la grandeur de la chaleur échangée en fonction du processus utilisé pour amener le système de son état initial à son état final. La figure 2.14 illustre deux évolutions distinctes A et B, reliant les mêmes états.

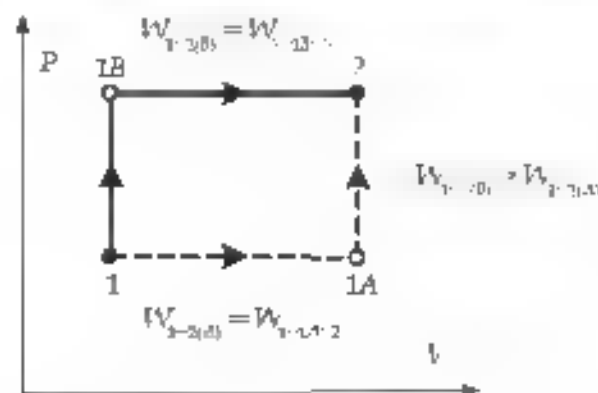


Figure 2.14 Deux évolutions distinctes reliant les états 1 et 2

L'évolution A est constituée d'une évolution isobare (1-1A) d'abord, et d'une évolution isochore (1A-2), ensuite. L'évolution B est constituée des deux mêmes évolutions mais pour lesquelles l'ordre a été inversé. On constate (tel que prévu) que le travail effectué lors de l'évolution B est plus important que celui effectué dans le cadre de l'évolution A.

En vertu du premier principe on peut écrire

$$\begin{aligned}U_2 - U_1 &= Q_{1 \rightarrow 2(A)} - W_{1 \rightarrow 2(A)} \\U_2 - U_1 &= Q_{1 \rightarrow 2(B)} - W_{1 \rightarrow 2(B)}\end{aligned}$$

Mais, l'énergie est une propriété du système (variable d'état). En conséquence,  $U_2 - U_1$ , est indépendant du chemin emprunté (de l'évolution) et on doit avoir

$$Q_{1 \rightarrow 2(A)} - W_{1 \rightarrow 2(A)} = Q_{1 \rightarrow 2(B)} - W_{1 \rightarrow 2(B)}$$

Puisque les travaux effectués diffèrent, il s'ensuit qu'il en est de même des chaleurs. Dans notre cas on aura

$$Q_{1 \rightarrow 2(A)} > Q_{1 \rightarrow 2(B)}$$

La chaleur échangée est donc fonction du chemin emprunté : ce dernier doit être spécifié.

## 2.5 Enthalpie

Pour certaines applications, notamment dans le cas d'écoulements, il est utile de définir la grandeur enthalpie  $H$

$$H = U + PV \quad (2.24)$$

ainsi que l'enthalpie massique,  $h$

$$h = u + Pv \quad (2.25)$$

Notons que l'enthalpie est définie simplement parce que l'on juge utile d'assigner un symbole à l'expression ' $U + PV$ ' qui se retrouve fréquemment en thermodynamique. Par ailleurs, puisque la définition de l'enthalpie ne fait intervenir que des variables d'état, il s'ensuit que l'enthalpie en est une aussi.

$H$  est une variable extensive. De ce fait, on aura pour un mélange liquide-vapeur

$$H = H_l + x H_v$$

Considérons maintenant un exemple d'application du concept d'enthalpie. Soit une évolution isobare reliant les états 1 et 2. On a, en vertu du premier principe

$$Q_{1 \rightarrow 2} = H_2 - H_1 + W_{1 \rightarrow 2}$$

Mais,

$$W_{1 \rightarrow 2} = P(V_2 - V_1) = P_2 V_2 - P_1 V_1$$

Alors :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = (U_2 + P_2 V_2) - (U_1 + P_1 V_1) = H_2 - H_1$$

Ainsi la chaleur échangée lors d'un processus isobare correspond à la variation d'enthalpie du système (dans la mesure que le travail est un travail d'expansion seulement).

**Exemple 2.3** Un ensemble piston-cylindre contient 50 g d'eau vapeur saturée maintenue à une pression constante de 300 kPa. Une résistance électrique placée dans le cylindre chauffe la substance durant 5 minutes à l'aide d'un courant  $I = 0,2\text{A}$  sous une tension  $V$  de 120 V. Durant ce processus l'eau perd, d'autre part, 4kJ de chaleur à travers les parois du cylindre. Considérant l'eau comme système établissez :

- la chaleur totale échangée et la variation d'enthalpie du système
- la température finale de la substance.

*Solution*

a) *Calcul de la chaleur*

La puissance dissipée par la résistance sous forme de chaleur est donnée par le produit de la tension et du courant électrique. Ainsi la chaleur totale  $Q_{1-2R}$  fournie par la résistance au système

$$Q_{1-2R} = VI\Delta t = 120(0,2)(5 \times 60) = 7,2 \text{ kJ}$$

Si  $Q_{1-2P}$  désigne la chaleur (négative, ici) qui traverse les parois du cylindre

$$Q_{1-2} = Q_{1-2R} + Q_{1-2P} = 7,2 - 4 = 3,2 \text{ kJ}$$

Puisqu'il s'agit d'une transformation isobare et que le seul travail est un travail d'expansion,

$$Q_{1-2} = H_2 - H_1 \quad H_2 = 3,2 \text{ kJ}$$

b)

$$\text{État 1} \quad \begin{cases} P_1 = 300 \text{ kPa} \\ x_1 = 1 \end{cases} ; \quad h_1 = h_g(300 \text{ kPa}) = 2725,3 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{État 2} \quad \begin{cases} P_2 = P_1 = 300 \text{ kPa} \\ h_2 = h_1 + \frac{\Delta H}{m} = 2725,3 + \frac{3,2}{0,05} = 2789,3 \text{ kJ/kg} \end{cases}$$

or  $h_g > h_g(300 \text{ kPa})$  vapeur surchauffée

On trouve donc :  $T_2 = 163,6^\circ\text{C}$

## 2.6 Chaleurs spécifiques

La chaleur spécifique représente la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température d'une substance de un degré dans des conditions spécifiques ( $V = cte$ ,  $P = cte$  et...). Comme la chaleur est une grandeur extensive, on a jugé utile de définir les chaleurs spécifiques pour un kilogramme de substance ou une mole de substance ( $C$ ,  $\bar{C}$ ). Dans ce texte nous entendons par chaleur spécifique, la chaleur spécifique massique.

La chaleur spécifique si la variable  $y$  est maintenue constante est définie par

$$C_y \triangleq \frac{\delta q}{dT}_y \quad (2-26)$$

D'autre part le premier principe stipule que

$$\delta q = du + \delta w$$

Si le travail est un travail d'expansion (quasi statique)

$$\delta w = Pdv$$

De sorte que

$$\delta q = du + Pdv \quad (2-27)$$

Les chaleurs spécifiques les plus couramment utilisées sont les chaleurs spécifiques à volume constant et à pression constante  $C = C_p$ . Pour une évolution isochore ( $V = cte$ )

$$\begin{aligned} \delta q &= du \\ C_v &= \left( \frac{\delta q}{dT} \right)_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \end{aligned}$$

Alors :

$$C_v = \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (2-28)$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} h &= u + Pv \\ dh &= du + Pdv + vdP \\ \delta q &= dh - vdP \end{aligned} \quad (2-29)$$

Ainsi pour une évolution isobare  $P = \text{cte}$

$$\begin{aligned} \delta q &= dh \\ C_p &= \frac{dh}{dT} \Big|_P = \frac{\partial h}{\partial T} \Big|_P \end{aligned}$$

Alors

$$C_p = \frac{\partial h}{\partial T} \Big|_P \quad (2-30)$$

Les variations d'énergie interne et d'enthalpie massiques s'obtiennent alors en intégrant les équations (2-28) et (2-30).

$$u_2 - u_1 = \int_1^2 c_v dT \Big|_V \quad (2-31)$$

$$h_2 - h_1 = \int_1^2 c_p dT \Big|_P \quad (2-32)$$

Les indices  $V$  et  $P$  des résultats indiquent que les équations (2-31) et (2-32) s'appliquent aux évolutions isochore et isobare respectivement.

## 2.7 L'application du premier principe aux gaz parfaits

Nous avons déjà établi que l'énergie interne d'un gaz dépendait seulement de la température.

$$u = u(T)$$

De plus, puisque :

$$Pv = RT \quad \text{et} \quad h = u + Pv$$

$$h = u + RT = u(T) \quad (2-33)$$

Ainsi l'enthalpie d'un gaz parfait ne dépend elle aussi que de la température. En conséquence, les équations (2-28) et (2-30) deviennent pour un gaz parfait.

$$C_v = \frac{du}{dT} \quad (2-34)$$

$$C_p = \frac{dh}{dT} \quad (2-35)$$

Notons que les dérivées partielles sont remplacées par des dérivées totales et que les références au type de processus (indices  $V$  et  $P$ ) ont disparu. En conséquence les équations (2-34) et (2-35) sont valables pour toutes évolutions quel qu'elles soient. Ces résultats sont très importants en ce qu'ils constituent le fondement de l'application du premier principe aux gaz parfaits. Notons d'abord qu'en dérivant l'équation (2-33) de part et d'autre par rapport à la température on obtient



$$\frac{du}{dT} = \frac{dv}{dT} + R$$

$$C_p = C_v + R \quad (2-36)$$

Les équations (2-34) et (2-35) peuvent être intégrées sans égard à l'évolution que connaît le système,

$$\begin{aligned} du &= C_v dT \\ u_2 - u_1 &= \int_{T_1}^{T_2} C_v(T) dT \end{aligned} \quad (2-37)$$

et

$$\begin{aligned} dh &= C_p dT \\ h_2 - h_1 &= \int_{T_1}^{T_2} C_p(T) dT \end{aligned} \quad (2-38)$$

$C_p$  et  $C_v$  dépendent en général de la température. La figure 2.15 illustre les graphes de  $C_p(T)$  et  $C_v(T)$  pour l'azote gazeux entre 300 K et 3000 K.

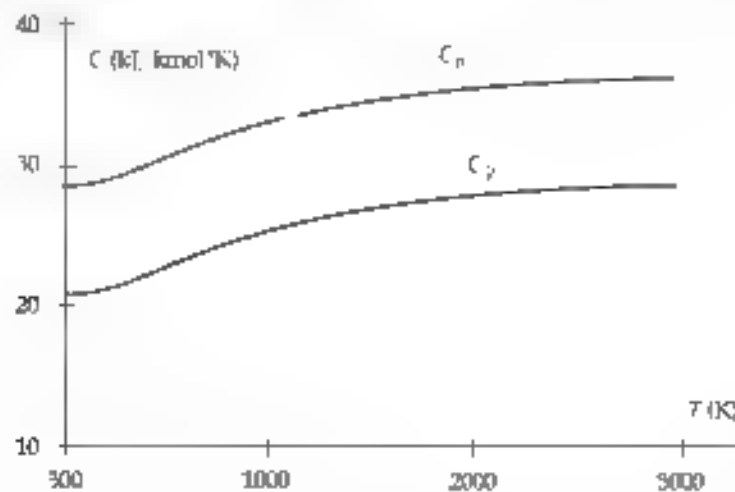


Figure 2.15 Dépendance de  $C_p$  et  $C_v$  en fonction de la température pour l'azote gazeux

On remarque que les chaleurs spécifiques varient relativement peu sur un intervalle de température restreint. D'ailleurs, sur l'ensemble de l'intervalle considéré la variation n'est que d'environ 30% alors que la température est multipliée par un facteur dix. Il est donc d'usage de les considérer constantes si l'intervalle de température n'est pas trop important. Les équations (2-37) et (2-38) donnent alors

$$u_2 - u_1 = C_v (T_2 - T_1) \quad (2-39)$$

$$h_2 - h_1 = C_p (T_2 - T_1) \quad (2-40)$$

Le tableau A.8 fournit les grandeurs de ces chaleurs spécifiques pour différents gaz à la température de 300 K.

*Résultat important*

Nous pouvons maintenant établir un résultat particulièrement important. Pour une substance connaissant une évolution quasi statique, nous avons établi que le premier principe s'écrit (équations (2-27) et (2-29))

$$\delta q = dh + P d\tau$$

et

$$d\tau = \tau dP$$

Si, par ailleurs, l'évolution est aussi adiabatique, il vient

$$dh = P d\tau$$

$$d\tau = \tau dP$$

Dans le cas d'un gaz parfait on peut écrire

$$dh = c_p dT = P d\tau \quad (2-41)$$

$$d\tau = c_p dT = \tau dP \quad (2-42)$$

En divisant l'équation (2-42) par l'équation (2-41),

$$\frac{c_p}{c_p} = \frac{\tau}{dh} \left( \frac{dP}{dT} \right)$$

Si on définit le rapport des chaleurs spécifiques,  $\lambda$ ,

$$\lambda = \frac{c_p}{c} \quad (2-43)$$

$$\lambda \left( \frac{dT}{T} \right) = \frac{dP}{P} \quad (2-44)$$

Si l'équation (2-44) est intégrée de part et d'autre, on trouve

$$\lambda \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right)$$

qui conduit à

$$P_1 T_1^\lambda = P_2 T_2^\lambda \quad (2-45)$$

Nous reconnaissons la forme du résultat (2-45) comme étant celle qui caractérise une évolution polytropique d'exposant  $\lambda$ . Ainsi, un gaz parfait connaissant une évolution adiabatique quasi statique, se transformera conformément à la loi

$$P T^\lambda = \text{cte} \quad (2-46)$$

## 2.8 Les systèmes en écoulement stationnaire.

Nous avons établi aux chapitres 4 et 5 de la mécanique des fluides les équations fondamentales régissant le comportement de ceux-ci. Pour les applications que nous considérerons par la suite, deux de ces équations seront utilisées.

### 2.8.1 Équation de continuité.

Pour un système en écoulement stationnaire nous avons établi l'équation 4-4 de la section 4.2.2 de la mécanique des fluides

$$\sum_i \dot{m}_i = \sum_s \dot{m}_s \quad (2-47)$$

où  $\dot{m}$  = débit massique en kg/s et les indices  $i$  et  $s$  réfèrent aux entrées et sorties du volume de contrôle respectivement.

### 2.8.2 Équation d'énergie

L'équation d'énergie présentée à la section 5.4 de la mécanique des fluides représente la formulation du premier principe pour les écoulements stationnaires. L'équation 5.11 en mécanique des fluides s'écrivait

$$\dot{Q} - \dot{W} - \dot{W}_f = \sum_i \dot{m} \left( h_i + \frac{P_i}{\rho} + \frac{V_i^2}{2} + g z_i \right) - \sum_s \dot{m} \left( h_s + \frac{P_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + g z_s \right)$$

Pour un fluide en écoulement dans une conduite (ou de façon plus générale, à l'intérieur d'une enceinte), on peut toujours choisir le volume de contrôle de façon à ce que la puissance dissipée pour combattre les forces de frottement visqueux,  $\dot{W}_f$  soit nulle. Ainsi posant  $\dot{W}_f = 0$

et remarquant que :  $h = u + \frac{P}{\rho}$ , l'équation d'énergie devient

$$\dot{Q} - \dot{W} = \sum_i \dot{m} \left( h_i + \frac{V_i^2}{2} + g z_i \right) - \sum_s \dot{m} \left( h_s + \frac{V_s^2}{2} + g z_s \right)$$

ou

$$\dot{Q} - \dot{W} = \sum_i \dot{m} \left( h + \frac{V^2}{2} + g z \right) - \sum_s \dot{m} \left( h + \frac{V^2}{2} + g z \right) \quad (2-48)$$

où  $\dot{W}_{tot} = \dot{W}_T + \dot{W}_P$

avec  $W_t$  : puissance développée par une turbine  
 $W_p$  : puissance utilisée par une pompe.

Pour la plupart des applications que nous rencontrerons par la suite, les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de gravité pourront être négligées et l'équation (2-48) s'écrit

$$\dot{Q} - \dot{W} = \sum_i \dot{m}_i h_i - \sum_e \dot{m}_e h_e \quad (2-49)$$

Finalement, si le volume de contrôle ne comporte qu'une entrée et qu'une sortie, l'équation (2-49) se simplifie plus avant

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W}_{\text{éc}} &= \dot{m} (h_e - h_i) \\ \eta = \dot{W}_{\text{éc}} &= h_i - h_e \end{aligned} \quad (2-50)$$

## 2.9 EXERCICES

**Problème 1** Un cylindre fermé par un piston sans frottement contient 5 kg de vapeur d'eau surchauffée à 1 MPa et 250 °C. On refroidit le système à pression constante jusqu'à ce que l'eau atteigne un titre de 50%. Calculez le travail qui s'effectue au cours de l'évolution.

Rép.  $W_{1,2} = -674,6 \text{ kJ}$

**Problème 2** Un dixième de kilogramme d'oxygène à 150 kPa et 20 °C est retenu dans un cylindre fermé par un piston. On dépose lentement des poids sur le piston et on comprime le gaz à température constante jusqu'à ce que la pression finale soit de 600 kPa. Calculez le travail qui s'effectue au cours de l'évolution.

Rép. :  $W_{1,2} = -10,6 \text{ kJ}$

**Problème 3** De l'air gaz partant à 100 kPa et 20 °C occupe un volume de 0,5 m<sup>3</sup>. Le volume passe à 0,25 m<sup>3</sup> calculez le travail et la température finale s'il s'agit :

- a) d'une évolution isotherme
- b) d'une évolution polytropique,  $PV^{1,4} = \text{cte}$

Rép. a)  $T_2 = 20 \text{ °C}$  ,  $W_{1,2} = -34,66 \text{ kJ}$

b)  $T_2 = 113,45 \text{ °C}$  ,  $W_{1,2} = -39,94 \text{ kJ}$

**Problème 4** Un ballon sphérique contient 1 kg d'air à 20 °C et 200 kPa. Le matériau du ballon est tel en sorte que la pression est toujours proportionnelle au rayon. On chauffe le ballon jusqu'à ce que la pression interne soit de 300 kPa.

- a) Montrez que l'évolution est du type  $P = a/V^n$  et déterminez la valeur de  $n$ .
- b) Quels sont les volumes initial et final ?
- c) Calculez le travail effectué au cours de cette évolution.

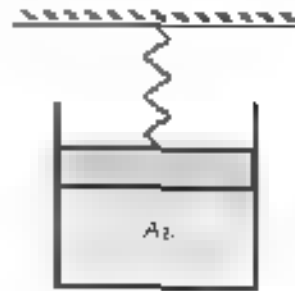
Rép. a)  $n = 1/3$

b)  $V_1 = 0,42 \text{ m}^3$  ,  $V_2 = 1,42 \text{ m}^3$

c)  $W_{1,2} = 256,5 \text{ kJ}$

**Problème 5** Soit le système représenté ci-dessous: le ressort est du type décrit dans le texte. Le volume initial à l'intérieur du cylindre est de 100 L et la pression  $p$  est de 100 kPa. Le ressort touche le piston mais n'exerce encore aucune force. On chauffe ensuite le système, ce qui entraîne une détente de l'air jusqu'à ce qu'il double de volume. La pression intérieure est alors de 300 kPa.

- a) Décrivez l'évolution au moyen d'un diagramme  $P-V$
- b) Calculez le travail qui effectue le système formé par l'air dans le cylindre.

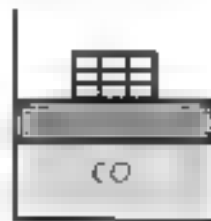


Rép. b)  $W_{1 \rightarrow 2} = 20 \text{ kJ}$

**Problème 6** Un ballon plat est gonflé à partir d'un réservoir d'air comprimé jusqu'à ce que son volume atteigne  $5 \text{ m}^3$ . Le baromètre indique  $95 \text{ kPa}$ . En choisissant le réservoir, le ballon et le tuyau de raccordement comme système, calculez le travail effectué durant cette évolution.

Rép. :  $W_{1 \rightarrow 2} = 475 \text{ kJ}$

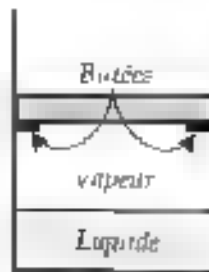
**Problème 7** L'arrangement cylindre-piston illustré ci-dessous contient  $0,2 \text{ m}^3$  de  $\text{CO}_2$  gaz parfait) à  $300 \text{ kPa}$  et  $200^\circ\text{C}$ . On retire les poids du piston jusqu'à la température finale de  $100^\circ\text{C}$  de manière à ce que le gaz se détende selon la relation  $PV^{1,2} = \text{cte}$ . Calculez le travail qui s'effectue durant l'évolution.



Rép.  $W_{1 \rightarrow 2} = 63,4 \text{ kJ}$

**Problème 8** Le cylindre représenté ci-dessous contient  $1 \text{ kg}$  d'eau saturée (liquide et vapeur) à  $30^\circ\text{C}$ . Le piston a une section de  $0,065 \text{ m}^2$  et une masse de  $40 \text{ kg}$  : il repose sur des butées. Au départ, le volume est de  $100 \text{ L}$  : la pression atmosphérique ambiante est de  $94 \text{ kPa}$  et  $g = 9,75 \text{ m/s}^2$ . On fournit de la chaleur au système jusqu'à ce qu'il soit de la vapeur saturée.

- Quelle est la température de l'eau au moment où le piston commence à s'élever au-dessus des butées ?
- Calculez le travail accompli par l'eau durant l'évolution entière.



Rép. a)  $T = 99,6\text{ }^{\circ}\text{C}$     b)  $W_{1\rightarrow 2} = 159,1\text{ kJ}$

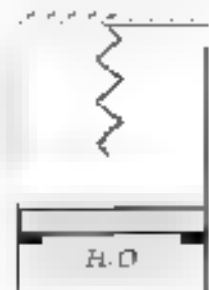
**Problème 9** On comprime de l'ammoniac dans un cylindre fermé par un piston sur lequel agit une force externe. À état initial la température est de  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Voici les données expérimentales concernant cette évolution.

État	Pression (kPa)	Volume (L)
1	500	1,25
2	653	1,08
3	802	0,96
4	945	0,84
5	1,00	0,72
6	1,38	0,60
7	1400	0,50

- a) Déterminez le travail effectué au cours de cette évolution.  
b) Quelle est la température finale de l'ammoniac ?

Rép. :    a)  $W_{1\rightarrow 7} = -686,11\text{ J}$     b)  $T_7 = 78,4\text{ }^{\circ}\text{C}$

**Problème 10** Soit l'arrangement piston-cylindre illustré ci-dessous. Le piston de section  $0,06\text{ m}^2$  repose sur des butées. Le volume alors renfermé est de  $30\text{ L}$ . La masse du piston est telle qu'il faut une pression de  $300\text{ kPa}$  pour le soulever à la pression ambiante. Lorsque le piston est soulevé jusqu'à un point où le volume est de  $75\text{ L}$ , il rencontre un ressort qui requiert  $360\text{ kN}$  pour être comprimé de  $1\text{ m}$ . Au début de l'expérience, le cylindre contient  $4\text{ kg}$  d'eau saturée (liquide et vapeur) à  $35\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Si on chauffe le système jusqu'à ce que la pression interne atteigne  $7\text{ MPa}$ , déterminez l'état final de l'eau et ainsi que le travail effectué durant l'évolution.

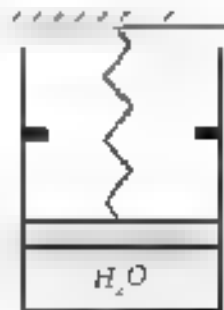


Rép.     $W_{1\rightarrow 2} = 258,1\text{ kJ}$  ,     $T_2 = 352,8\text{ }^{\circ}\text{C}$

**Problème 11** Le cylindre illustré ci-dessous est fermé par un piston qui est retenu par un ressort qui est complètement détendu quand le volume dans le cylindre est nul. Le poids du piston est négligeable. Quand le piston atteint les butées, le volume renfermé dans le cylindre est de 120 L. Au départ, les 4 kg d'eau présentent une pression et un titre de 350 kPa et de 1% respectivement. L'eau est chauffée jusqu'à ce qu'elle se transforme en vapeur saturée. NB :  $P_{\text{atm}} = 100 \text{ kPa}$

Représentez cette évolution au moyen d'un diagramme  $P-V$  et calculez

- la pression finale dans le cylindre
- le travail fait par l'eau durant le procédé



Rép. : a)  $P = 6,481 \text{ MPa}$       b)  $W_{1-3} = 77,6 \text{ kJ}$

**Problème 12** Calculez le travail effectué et la chaleur échangée au cours de l'évolution décrite au problème numéro 11 du chapitre précédent

Rép.  $W_{1-3} = 2,55 \text{ kJ}$        $Q_{1-3} = 47,8 \text{ kJ}$

**Problème 13** Calculez le travail effectué et la chaleur échangée au cours de l'évolution décrite au problème numéro 12 du chapitre précédent

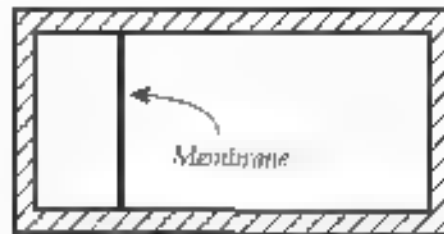
Rép.  $W_{1-3} = 183,6 \text{ kJ}$        $Q_{1-3} = 549,4 \text{ kJ}$

**Problème 14** Un réservoir rigide d'une capacité de 500 L est rempli de R134a à 1 MPa et 100 °C. On refroidit le réservoir jusqu'à 0 °C. Calculez la chaleur échangée au cours de cette évolution.

Rép. :  $Q_{1-2} = -3377,5 \text{ kJ}$

**Problème 15** Soit le récipient isolé illustré à la figure qui suit. Il est constitué d'un compartiment sous vide séparé par une membrane d'un second compartiment qui contient 0,5 kg d'eau à 65 °C et 700 kPa. La membrane se rompt et l'eau remplit alors tout le volume du récipient de sorte que la pression résultante est de 10 kPa. Déterminez la température finale de l'eau et le volume du récipient





Rép.  $T = 53,97\text{ }^{\circ}\text{C}$      $V_{\text{recup}} = 0,1042\text{ m}^3$

**Problème 16** Un cylindre isolé et fermé par un piston contient du réfrigérant R134a à  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  dont le titre est de 90%. Le volume est alors de 30 L. On laisse le piston se déplacer et le R134a se détend jusqu'à ce qu'il se transforme en vapeur saturée. Pendant l'évolution, le système effectue un travail de 4,0 kJ sur le piston. Qu'implique le fait que le piston soit isolé? Déterminez la température finale.

Rép.  $T_2 = 17,1\text{ }^{\circ}\text{C}$

**Problème 17** Un cylindre vertical fermé par un piston contient 5 kg de R134a à  $12\text{ }^{\circ}\text{C}$ . On fournit de la chaleur au cylindre, ce qui a pour effet de faire monter jusqu'à ce qu'il atteigne des bulles. À ce moment-là, le volume a doublé. On fournit encore de la chaleur jusqu'à ce que la température intérieure atteigne  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ . La pression dans le cylindre est alors 1,2 MPa. Calculez le titre à l'état initial et la chaleur échangée.

Rép. a)  $x_1 = 0,229$     b)  $Q_{1,3} = 1021,3\text{ kJ}$

**Problème 18** Une masse de 5 kg de R134a à  $8\text{ }^{\circ}\text{C}$  ayant un titre de 30 % est retenue dans un ballon sphérique qui est soumis à une pression interne proportionnelle à son diamètre. On chauffe le système jusqu'à ce que la pression dans le ballon atteigne 500 kPa. Quelle quantité de chaleur est transférée au cours de l'évolution?

Rép.  $Q_{1,2} = 543,7\text{ kJ}$

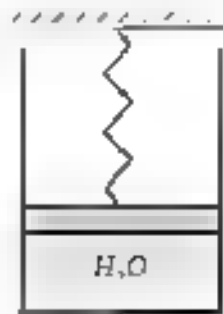
**Problème 19** Un cylindre est fermé par un piston, lequel est retenu par un ressort linéaire (force proportionnelle au déplacement). Le cylindre a un diamètre de 0,25 m, un volume initial de 20 L et contient du R134a à 1 MPa et  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ . La constante du ressort est de 150 kN/m. On refroidit le système et le piston se déplace jusqu'à ce que la pression soit de 614,95 kPa.

- Trouvez la température finale et le volume final du réfrigérant.
- Calculez le travail effectué et la quantité de chaleur transférée au cours de l'évolution.

Rép. a)  $T = 22,4\text{ }^{\circ}\text{C}$  ;  $V_2 = 13,8\text{ L}$   
 b)  $Q_{1,2} = 103,85\text{ kJ}$      $W_{1,2} = 5,0\text{ kJ}$

**Problème 20** Un cylindre contient 0,4 kg de vapeur d'eau saturée à 110 °C comme illustre la figure suivante. Le ressort touche alors le piston mais n'y exerce encore aucune force. On fournit de la chaleur à l'eau, ce qui entraîne l'élévation du piston. Pendant l'évolution, la force de rappel du ressort est proportionnelle au déplacement du piston. La constante du ressort est de 50 kN/m et la section du piston est de 0,05 m<sup>2</sup>.

- Quelle est la température dans le cylindre lorsque la pression intérieure atteint 300 kPa ?
- Calculez la quantité de chaleur transmise au cours de l'évolution.



Rép. a)  $T_1 = 527,3\text{ °C}$  b)  $Q_{1-2} = 265,3\text{ kJ}$

**Problème 21** Soit l'ensemble piston-cylindre illustré à la figure qui suit où le piston sans frottement est libre de se déplacer entre deux jeux de butées. Le volume délimité par le piston en contact avec les butées inférieures est de 400 L et il vaut 600 L quand le piston atteint les butées supérieures. Initialement, le cylindre est rempli d'eau à 100 kPa à un titre de 20 %. On chauffe le système jusqu'à ce que l'eau devienne de la vapeur saturée. Si la masse du piston est telle qu'une pression de 300 kPa est nécessaire pour le soulever contre la pression ambiante calculez

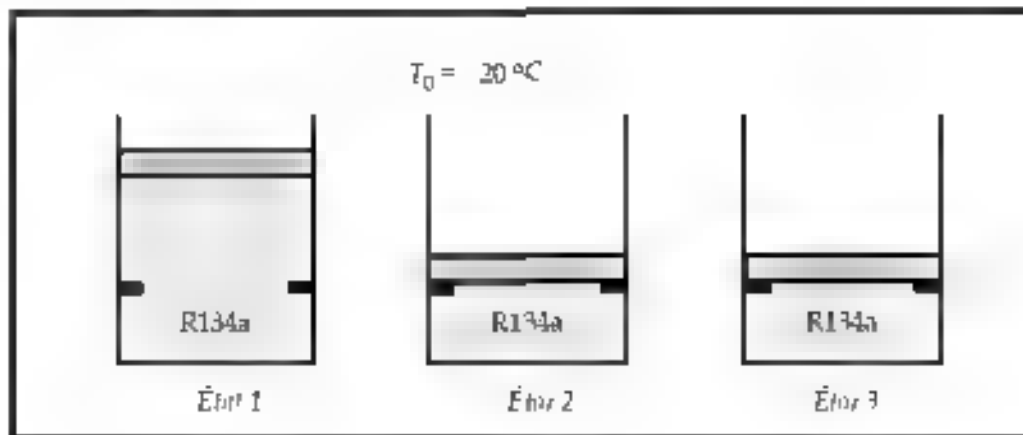
- la pression finale dans le cylindre.
- la quantité de chaleur échangée et le travail effectué durant l'évolution entière



Rép. a)  $P = 361\text{ kPa}$  b)  $Q_1 = 2080\text{ kJ}$  ,  $W_{1,2} = 60\text{ kJ}$

**Problème 22** Du R134a est contenu dans un cylindre fermé par un piston (voir figure ci-dessous). Le volume est de  $1 \text{ m}^3$ , la pression de  $400 \text{ kPa}$  et la température de  $40^\circ\text{C}$  (état 1). Le cylindre perd constamment de la chaleur à un réservoir froid dont la température est  $20^\circ\text{C}$ . Le piston descend lentement jusqu'à ce qu'il frôle les butées (état 2). Le volume est alors de  $0,5 \text{ m}^3$ . Le R134a continue à perdre de la chaleur jusqu'à ce que sa température soit de  $20^\circ\text{C}$  (état 3).

- Donnez, pour chaque état,  $T$ ,  $P$ ,  $v$  et  $x$  (si le R134a est un mélange liquide-vapeur).
- Tracez les évolutions sur un diagramme  $P-v$ .
- Calculez  $W_{1-3}$  et  $Q_{1-3}$ .



Rép. : a)  $T_1 = 40^\circ\text{C}$ ,  $P_1 = 400 \text{ kPa}$ ,  $V_1 = 1 \text{ m}^3$   
 $T_2 = 8.93^\circ\text{C}$ ,  $P_2 = 400 \text{ kPa}$ ,  $v_2 = 0,5 \text{ m}^3$ ,  $x_2 = 0,5724$   
 $T_3 = 20^\circ\text{C}$ ,  $P_3 = 132,7 \text{ kPa}$ ,  $v_3 = 0,5 \text{ m}^3$ ,  $x_3 = 0,1971$   
 c)  $W_{1-3} = -200 \text{ kJ}$ ,  $Q_{1-3} = -3523,5 \text{ kJ}$

**Problème 23** Un gaz parfait est chauffé de  $500$  à  $1000 \text{ K}$ . On demande de calculer la variation d'enthalpie massique en supposant que la chaleur massique est constante (voyez la table A.8). Calculez cette valeur si le gaz est

- de l'hélium ;
- de l'azote ;
- du dioxyde de carbone.

Rép. : a)  $\Delta h = 2596,3 \text{ kJ/kg}$ , b)  $\Delta h = 520,8 \text{ kJ/kg}$ , c)  $\Delta h = 420,9 \text{ kJ/kg}$

**Problème 24** Un cylindre fermé par un piston contient  $0,15 \text{ kg}$  d'air initialement à  $100 \text{ kPa}$  et  $30^\circ\text{C}$ . On comprime l'air par un procédé polytropique d'exposant  $n = 1,25$ , jusqu'à ce que le volume final corresponde au dixième du volume initial. Calculez le travail effectué et la quantité de chaleur transmise au cours de l'évolution.

Rép. :  $W_{1-2} = -40,5 \text{ kJ}$ ,  $Q_{1-2} = -15,4 \text{ kJ}$

**Problème 25** Un ballon a été conçu pour supporter une pression intérieure  $P_0 = 100 \text{ kPa}$  jusqu'à ce que son volume atteigne  $V_0 = 20 \text{ m}^3$  au-delà de cette valeur,

$$P = P_0 + C(V - V_0)^2$$

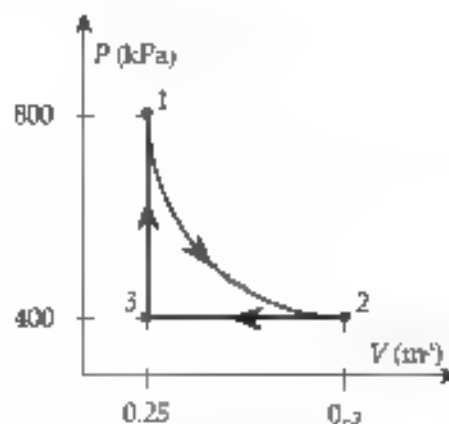
Le ballon contient de l'hélium à  $20^\circ\text{C}$  et  $100 \text{ kPa}$  dans un volume de  $15 \text{ m}^3$ . On le chauffe jusqu'à ce que l'hélium atteigne  $400^\circ\text{C}$  et la pression est alors de  $150 \text{ kPa}$ . Calculez le travail effectué par l'hélium ainsi que la quantité de chaleur échangée.

Rép. :  $W_{1 \rightarrow 2} = 846,4 \text{ kJ}$        $Q_{1 \rightarrow 2} = 3764,6 \text{ kJ}$

**Problème 26** Un cylindre fermé par un piston contient de l'argon à  $140 \text{ kPa}$  et  $10^\circ\text{C}$  dans un volume de  $200 \text{ L}$ . On comprime alors ce gaz par un procédé polytropique jusqu'à  $700 \text{ kPa}$  et  $180^\circ\text{C}$ . Calculez la quantité de chaleur échangée pendant l'opération.

Rép.  $Q_{1 \rightarrow 2} = -15,7 \text{ kJ}$

**Problème 27** De l'air subit trois évolutions successives formant ainsi un cycle (voir figure ci-dessous). L'évolution 1-2 est isotherme à  $T = 600 \text{ K}$ . Comme on peut le constater sur la figure, les évolutions 2-3 et 3-1 sont isobare et isochore respectivement. Calculez le travail et la chaleur échangée pour chaque évolution.

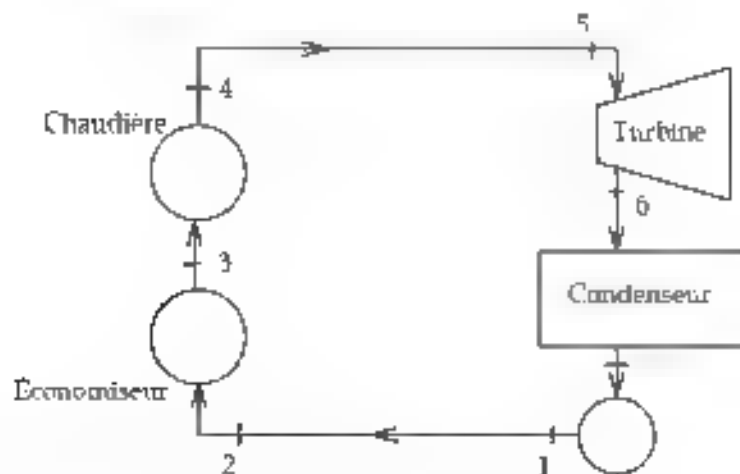


Rép.  $W_{1 \rightarrow 2} = 138,6 \text{ kJ}$      $W_{2 \rightarrow 3} = -100 \text{ kJ}$      $W_{3 \rightarrow 1} = 0$   
 $Q_{1 \rightarrow 2} = 138,6 \text{ kJ}$      $Q_{2 \rightarrow 3} = -349,4 \text{ kJ}$      $Q_{3 \rightarrow 1} = 249,6 \text{ kJ}$

**Problème 28** Les données suivantes correspondent aux conditions qui prévalent dans une centrale thermique élémentaire comme celle qui est illustrée à la figure ci-dessous

$$\begin{aligned} P_1 &= 6,2 \text{ MPa} \\ P_2 &= 6,0 \text{ MPa} \quad T_2 = 40^\circ\text{C} \\ P_3 &= 6,0 \text{ MPa} \quad T_3 = 160^\circ\text{C} \\ P_4 &= 5,5 \text{ MPa}, \quad T_4 = 500^\circ\text{C} \\ P_5 &= 5,0 \text{ MPa}, \quad T_5 = 490^\circ\text{C} \\ P_6 &= 10 \text{ kPa}, \quad v_6 = 0,92 \\ P_7 &= 9 \text{ kPa} \quad T_7 = 40^\circ\text{C} \end{aligned}$$

$$\dot{m} = 25 \text{ kg/s}$$



Négligeant les variations d'énergie cinétique et potentielle, calculez

- la puissance de sortie de la turbine (adiabatique),
- le taux de transmission de chaleur dans le condenseur, dans l'économiseur et dans le générateur de vapeur,
- le débit d'eau de refroidissement dans le condenseur si la température de l'eau de refroidissement y passe de  $15^\circ\text{C}$  à  $25^\circ\text{C}$

Rép.

- $\dot{W} = 25430 \text{ kW}$
- $\dot{Q}_{\text{cond}} = 55640 \text{ kW}$
  - $\dot{Q}_{\text{econ}} = 12650 \text{ kW}$
  - $\dot{Q}_{\text{ch}} = 68730 \text{ kW}$
- $\dot{m}_r = 1328 \text{ kg/s}$



# CHAPITRE 3

## LE SECOND PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

### Table des matières

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>3.2</b>	<b>Réservoirs thermiques</b>	<b>3</b>
<b>3.3</b>	<b>Machines thermiques et réfrigérateurs</b>	<b>3</b>
3.3.1	Machines thermiques	3
3.3.1.1	Rendement thermique	5
3.3.2	Réfrigérateurs et pompes thermiques	6
3.3.2.1	Coefficient de performance	7
<b>3.4</b>	<b>Le second principe de la thermodynamique</b>	<b>8</b>
3.4.1	L'énoncé de Kelvin-Planck	8
3.4.2	Énoncé de Clausius	8
<b>3.5</b>	<b>Évolutions réversibles et irréversibles</b>	<b>8</b>
3.5.1	Irréversibilité et travail perdu	9
<b>3.6</b>	<b>Cycle de Carnot</b>	<b>11</b>
3.6.1	D'autres résultats concernant les cycles de Carnot	12
<b>3.7</b>	<b>L'inégalité de Clausius</b>	<b>13</b>
<b>3.8</b>	<b>Entropie</b>	<b>14</b>
3.8.1	Entropie massique	15
3.8.2	Diagramme $T-s$	15
<b>3.9</b>	<b>Représentation du cycle de Carnot sur un diagramme <math>T-s</math></b>	<b>18</b>
<b>3.10</b>	<b>Le principe d'accroissement de l'entropie</b>	<b>19</b>
<b>3.11</b>	<b>Relations <math>Tds</math></b>	<b>22</b>
<b>3.12</b>	<b>Variation d'entropie d'un gaz parfait.</b>	<b>22</b>
<b>3.13</b>	<b>Variation d'enthalpie lors d'une évolution adiabatique réversible.</b>	<b>26</b>
<b>3.14</b>	<b>EXERCICES</b>	<b>29</b>





### 3.1 Introduction

Si une tasse de café à la température de  $50^{\circ}\text{C}$  est placée dans une pièce à  $20^{\circ}\text{C}$  elle verra sa température s'abaisser, l'énergie qu'elle perd étant transférée à l'air de la pièce sous forme de chaleur. Cette évolution, remarquons-le, satisfait le premier principe de la thermodynamique. Toutefois, l'évolution inverse consistant en un transfert de chaleur de l'air vers le café dans les conditions spécifiées ne sera pas observée même si elle aussi est permise par le premier principe. Le premier principe, on le constate, ne suffit donc pas à prédire comment les choses vont évoluer. Plus précisément, il ne permet pas de prédire le *sens* avec lequel s'effectuera la transformation d'un système. Une nouvelle loi, le second principe de la thermodynamique est donc rendue nécessaire pour rendre compte de ce qui est effectivement observé. Le second principe permet de comprendre pourquoi la plupart des évolutions que l'on rencontre sont à sens unique : la chaleur passe du corps chaud au corps froid, le verre se brise mais ne se reconstitue spontanément, deux gaz se mélangent mais leur séparation nécessite l'action d'un agent extérieur etc.

### 3.2 Réservoirs thermiques

Il arrive souvent que le système soit mis en contact thermique avec un corps dont les dimensions et la masse sont telles que les échanges de chaleur entre le système et celui-ci n'affectent pour ainsi dire pas la température du corps en question. On dira de ce corps qu'il agit comme *réservoir thermique* vis-à-vis du système. Un réservoir thermique idéal sera alors caractérisé par le fait qu'il peut échanger à n'importe quelle quantité de chaleur tout en maintenant sa température soit constante. À titre d'exemple, l'air de la pièce qui refroidit le café peut être considéré comme agissant comme réservoir thermique puisqu'il sa température restera sensiblement la même durant le processus.

### 3.3 Machines thermiques et réfrigérateurs

Historiquement parlant, le second principe a d'abord été introduit dans le cadre de la description du fonctionnement des machines thermiques et des réfrigérateurs. Comme cette approche est aussi la plus simple du point de vue conceptuel, c'est celle que nous adopterons.

#### 3.3.1 Machines thermiques

On définit la *machine thermique* ainsi : il s'agit d'une machine fonctionnant selon un cycle qui reçoit de la chaleur d'un réservoir thermique à haute température et qui rejette de la chaleur vers un réservoir thermique à basse température et ce faisant produit un travail net positif. Le schéma de la machine thermique est illustré à la figure 3.1.

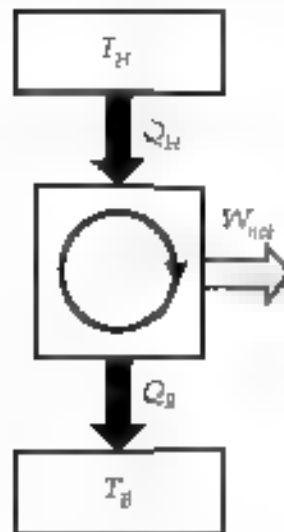


Figure 3.1 Schéma de la machine thermique

$T_H$  et  $T_B$  représentent les températures des réservoirs thermiques à haute et basse température respectivement. Les chaleurs que ceux-ci échangent avec la machine seront désignées par  $Q_H$  et  $Q_B$  respectivement. Pour simplifier l'écriture de certaines équations (ainsi que leur interprétation), il est d'usage que ces symboles représentent les valeurs absolues des chaleurs échangées. Ainsi, la chaleur reçue par la machine du réservoir à  $T_H$  étant positive, alors

$$Q_{\text{reçue}} = Q_H$$

En contrepartie, la chaleur perdue par la machine vers le réservoir à  $T_B$  est négative, alors

$$Q_{\text{perdue}} = -Q_B$$

La machine thermique type comporte quatre éléments (figure 3.2)

- 1) un évaporateur (ou réchauffeur)
- 2) une turbine
- 3) un condenseur (ou refroidisseur)
- 4) une pompe (ou compresseur)

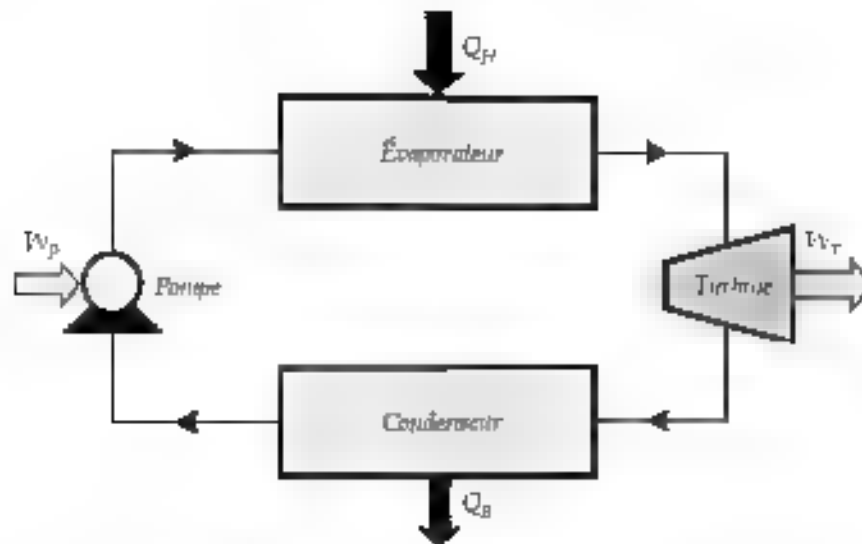


Figure 3.2 Éléments de base d'une machine thermique

Le travail net du cycle sera alors

$$W_{\text{net}} = W_T + W_p \quad (3.1)$$

et la chaleur nette échangée

$$Q_{\text{net}} = Q_H - Q_B \quad (3.2)$$

En vertu du premier principe

$$\begin{aligned} Q_{\text{net}} &= W_{\text{net}} \\ W_{\text{net}} &= Q_H - Q_B \end{aligned}$$

### 3.3.1.1 Rendement thermique

Le rendement thermique,  $\eta$ , est défini comme le rapport de l'énergie recherchée ( $W_{\text{net}}$ ) sur l'énergie à fournir  $Q_H$

$$\eta = \frac{W_{\text{net}}}{Q_H} \quad (3.3)$$

Alors

$$\eta = \frac{Q_H - Q_B}{Q_H} = 1 - \frac{Q_B}{Q_H} \quad (3.4)$$

A priori, le rendement thermique sera compris entre 0 et 1. Toutefois, on verra à la suite que le second principe impose une limite supérieure théorique à la valeur que peut prendre  $\eta$ .

**Exemple 3.1** Une machine thermique reçoit un taux de chaleur  $\dot{Q}_H$  de 100 kW et rejette un taux de chaleur  $\dot{Q}_E$  de 80 kW. Calculez le rendement thermique de ce cycle.

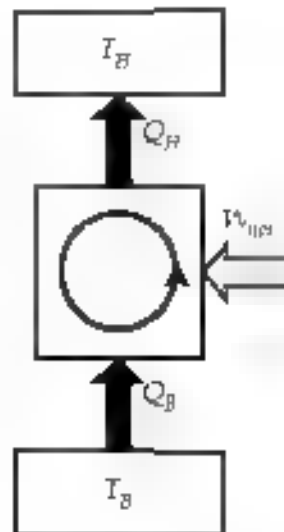
*Solution*

$$W_{\text{net}} = \dot{Q}_H - \dot{Q}_E = 20 \text{ kW}$$

$$\eta = \frac{W_{\text{net}}}{\dot{Q}_H} = 20\%$$

### 3.3.2 Réfrigérateurs et pompes thermiques

On définit le *réfrigérateur* ou la *pompe thermique* ainsi : il s'agit d'une machine fonctionnant selon un cycle qui reçoit de la chaleur d'un réservoir à basse température et rejette de la chaleur vers un réservoir à haute température et qui, pour ce faire, nécessite l'apport de travail (travail net négatif).



**Figure 3.3** Schéma du réfrigérateur ou de la pompe thermique

Le réfrigérateur de base comporte quatre éléments (figure 3.4)

- 1) un compresseur
- 2) un condenseur
- 3) une soupape d'étranglement
- 4) un évaporateur

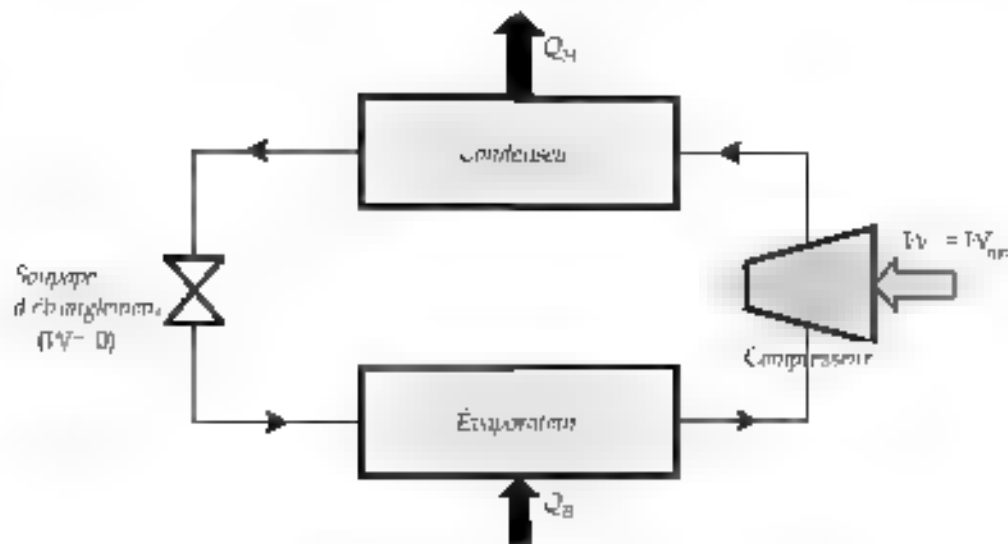


Figure 3.4 Éléments de base d'un réfrigérateur

### 3.3.2.1 Coefficient de performance

Alors que l'efficacité d'un cycle de machine thermique se mesure à l'aide du rendement thermique  $\eta$ , on l'a quantifié en employant le coefficient de performance  $\beta$  pour les cycles de réfrigération. Le cycle de réfrigération est utilisé à deux fins

- a) retirer de la chaleur d'un corps à basse température (réfrigérateur)
- b) fournir de la chaleur à un corps à haute température (pompe thermique).

Si l'appareil est employé comme réfrigérateur  $\beta$  est défini par

$$\beta = \frac{Q_B}{W_{\text{net}}}, \quad (3-5)$$

Puisque

$$W_{\text{net}} = Q_H - Q_B < 0$$

il vient

$$W_{\text{net}} = Q_H - Q_B$$

et

$$\beta = \frac{1}{\frac{Q_H}{Q_B} - 1} \quad (3-6)$$

Quand l'appareil travaille comme pompe thermique, on utilise plutôt le coefficient de performance  $\beta$  défini par

$$\beta = \frac{Q_H}{W_{\text{net}}} = \frac{1}{1 - \frac{Q_B}{Q_H}} \quad (3-7)$$

### 3.4 Le second principe de la thermodynamique

Il existe deux énoncés du second principe de la thermodynamique concernant les caractéristiques présentées par un cycle de machine thermique, d'une part, et d'un cycle de réfrigération, d'autre part.

#### 3.4.1 L'énoncé de Kelvin-Planck

L'énoncé de Kelvin-Planck se lit comme suit : il est impossible de réaliser un appareil décrivant un cycle et qui n'aurait d'autre effet que de produire du travail en échangeant de la chaleur qu'avec un seul réservoir.

Cet énoncé concerne toute des machines thermiques. Il indique que l'échange de chaleur doit se faire avec deux réservoirs au moins. Puisque l'échange de chaleur avec le réservoir à haute température est obligatoire afin que le premier principe soit satisfait, l'énoncé de Kelvin-Planck doit être interprété comme le constat que de la chaleur doit être rejetée vers le réservoir à basse température ( $Q_b \neq 0$ ). Une autre façon de l'interpréter est que toute la chaleur absorbée par la machine ( $Q_H$ ), ne peut être convertie en travail. En conséquence, aucune machine thermique ne peut présenter de rendement thermique de 100%.

#### 3.4.2 Énoncé de Clausius

L'énoncé de Clausius se lit comme suit : il est impossible de réaliser un appareil décrivant un cycle qui ne produirait d'autre effet que celui de transmettre de la chaleur d'un corps froid à un corps chaud.

Cet énoncé traite des cycles de réfrigération. Il stipule qu'on ne peut construire de réfrigérateur qui fonctionnerait sans travail ou ce qui est équivalent, on ne peut faire transiter de la chaleur d'un corps froid vers un corps chaud sans apport d'énergie sous forme de travail. En conséquence, le coefficient de performance ne peut être infini.

### 3.5 Évolutions réversibles et irréversibles

On dit d'une évolution qu'elle est *réversible* si, après qu'elle a été décrite, elle peut être inversée de manière à ne laisser subsister aucune modification du système ou du milieu ambiant. Exprimé autrement, une évolution réversible est une évolution qui peut être stoppée en tout moment et être décrite en sens inverse sans pour cela nécessiter que l'on apporte des modifications au système ou à l'environnement.

L'évolution ne sera pas réversible (*irréversible*, donc) si un ou plusieurs des facteurs suivants caractérise l'évolution :

1. L'évolution n'est pas quasi statique.

- 2) il existe des effets dissipatifs tels que frottement entre des surfaces solides, frottement visqueux, hystérésis, etc
- 3, il y a transfert de chaleur en présence d'une différence finie de température entre le système et l'environnement.

*Exemples d'évolutions irréversibles.*

1) Soit un piston pouvant se déplacer dans un cylindre qui exerce une force de frottement,  $F_f$  sur le piston. Si le système subit une expansion isobare à la pression  $P$  la pression de l'environnement doit être inférieure à  $P$  et valoir  $P - F_f/A$ . Si après avoir stoppé l'évolution, on veut l'inverser et comprimer le système dans les mêmes conditions, la pression de l'environnement devra être haussée à  $P + F_f/A$  (figure 3.5).

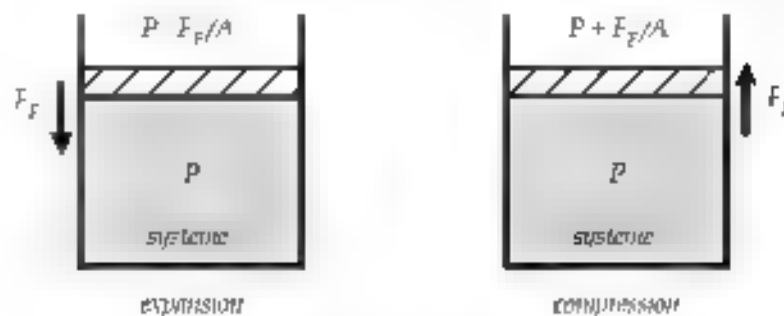


Figure 3.5 Le frottement traduit de l'irréversibilité

Notons que dans ce cas, le système subit une évolution quasi statique: il n'est pas responsable de l'irréversibilité.

2) Un contenant comprend deux régions séparées par une membrane. La première région est occupée par un gaz alors que l'autre est évacuée. Si la membrane est rompue, le gaz remplit tout le volume. Ce processus est irréversible car l'évolution ne peut être inversée sans que l'environnement soit modifié.

Comme toute évolution réelle présente au moins un des facteurs d'irréversibilité mentionnés plus haut, on comprendra que l'évolution réversible est une idéalisation qui ne se produit jamais dans la réalité.

### 3.5.1 Irréversibilité et travail perdu

Si l'évolution réversible n'est pas réalisable, à quoi sert l'introduction d'un tel concept ? Nous répondrons à cette question à l'aide de deux exemples.

Revenons sur le cas de la détente libre du gaz dont nous avons fait état plus haut. Cette évolution est irréversible car non contrôlée (non quasi statique). Admettons que le contenant avec le gaz soit en contact thermique avec un réservoir thermique à la température  $T_0$ . Si le volume du contenant est  $V_c$  et que le gaz (partiel) en occupe initialement la moitié, alors les conditions initiales et finales du système seront

$$\dot{E}_{int} 1 \left\{ \begin{array}{l} T_s = T_0 \\ V' = V_c / 2 \end{array} \right. \quad \dot{E}_{int} 2 \left\{ \begin{array}{l} T_s = T_0 \\ V = V_c \end{array} \right.$$

Remarquons qu'aucun travail n'est effectué lors de l'évolution « détente libre ».

Toutefois, le système passera, par les mêmes états initial et final s'il connaît une évolution isotherme à la température  $T_0$ . Dans le cas d'une évolution isotherme réversible, le travail vaudrait

$$W_{1 \rightarrow 2} = n R T_0 \ln(2)$$

On peut interpréter ces constats de la façon suivante. La transformation du système de son état initial à son état final présente un « potentiel de travail » qui sera réalisé à des degrés divers selon le type d'évolution employée. Manifestement la détente libre constitue un gaspillage total de ce « potentiel » puisqu'aucun travail n'est effectué.

Voyons un autre exemple. Considérons le chauffage isobare d'un mélange liquide-vapeur entre les volumes  $V_1$  et  $V_2$ . Puisque  $P = P_s$  le travail sera

$$W_{1 \rightarrow 2} = P_s (V_2 - V_1) = P_s \Delta V$$

Admettons que la chaleur provienne d'un réservoir thermique à la température  $T_0$ . Si la température du système est  $T < T_0$ , le transfert de chaleur se fera de façon irréversible et le travail sera

$$W_{1 \rightarrow 2T} = P_s(T) \Delta V$$

En contrepartie, si le système est porté à la température du réservoir thermique avant que ne débute l'expansion, le transfert de chaleur sera réversible et on trouvera

$$W_{1 \rightarrow 2(T_0)} = P_s(T_0) \Delta V$$

Puisque  $T_0 > T$ , alors  $P_s(T_0) > P_s(T)$  et  $W_{1 \rightarrow 2(T_0)} > W_{1 \rightarrow 2T}$ . Ce résultat est illustré à la figure 3.6.

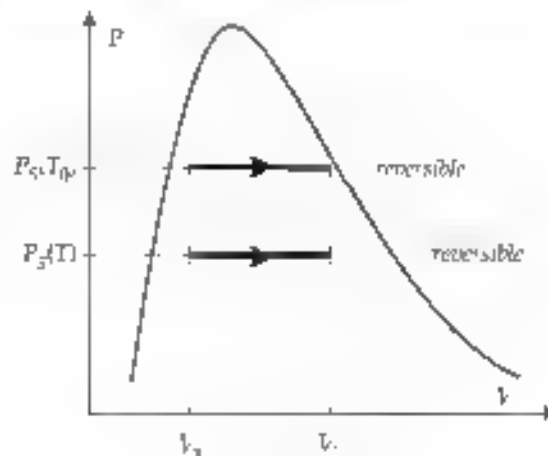


Figure 3.6 Travaux produits lors d'évolutions réversible et irréversible



De façon générale, l'utilisation la plus efficace de ce « potentiel de travail » se fera par le biais d'évolutions réversibles et on peut toujours associer un certain gaspillage de ce potentiel à la présence d'irrégularités durant l'évolution. L'évolution réversible constitue alors une situation idéale vers laquelle on doit chercher à tendre si on veut optimiser l'interaction entre le système et son environnement.

### 3.6 Cycle de Carnot

Le second principe de la thermodynamique stipule que le rendement d'une machine thermique ne peut jamais atteindre 100% quelle que soit sa conception. On est donc en droit de se demander s'il est possible de prédire le rendement maximal auquel on peut s'attendre pour une machine fonctionnant entre deux réservoirs thermiques déterminés. En vertu de ce que nous avons vu plus haut, on comprendra que le cycle le plus efficace sera nécessairement constitué d'évolutions réversibles.

Reconsidérons le schéma de la machine thermique représenté à la figure 3.1. Le système n'échange de la chaleur qu'avec les réservoirs thermiques de températures de  $T_H$  et  $T_B$ . Or tout échange de chaleur, pour qu'il soit réversible, doit s'effectuer sans écart de température entre le système et son environnement. Ainsi, le cycle devra comporter deux évolutions isothermes réversibles aux températures de  $T_H$  et  $T_B$ , respectivement. Le système doit toutelois passer de  $T_H$  à  $T_B$  et puis de  $T_B$  à  $T_H$  pour compléter le cycle. Comme les échanges de chaleur doivent s'effectuer de façon isotherme pour être réversibles, il s'ensuit que les évolutions de diminution et d'augmentation de température doivent être adiabatiques réversibles. Or, pour mon être que lors d'évolutions adiabatiques, le volume du système doit varier de sorte que le cycle sera constitué des évolutions suivantes :

- 1) évolution isotherme réversible à  $T = T_H$  au cours de laquelle le système échange de la chaleur avec le réservoir chaud.
- 2) évolution d'expansion adiabatique réversible
- 3) évolution isotherme réversible à  $T = T_B$  au cours de laquelle le système échange de la chaleur avec le réservoir froid
- 4) évolution de compression adiabatique réversible

Un cycle constitué de ces quatre évolutions est dénommé *cycle de Carnot*. Remarquons que c'est le seul cycle totalement réversible qui puisse échanger de la chaleur avec deux réservoirs seulement. Aucun autre cycle n'échangeant de la chaleur qu'avec deux réservoirs ne peut être aussi efficace. En conséquence, le cycle de Carnot peut servir de référence à laquelle les autres cycles seront comparés.

Remarquons finalement que puisque toute évolution réversible peut par définition s'inverser, il en va de même du cycle dans son ensemble. Parcouru dans un sens le cycle de Carnot correspond à un cycle de machine thermique (chaleur absorbée à  $T_H$  et rejetée à  $T_B$ ). Parcouru dans le sens inverse, on obtient un cycle de Carnot de réfrigération (chaleur absorbée à  $T_B$  et rejetée à  $T_H$ ).

### 3.6.1 D'autres résultats concernant les cycles de Carnot

Nous avons établi que le cycle de Carnot est le cycle le plus performant, étant donné deux réservoirs thermiques de température  $T_H$  et  $T_B$ .

Nous allons admettre sans démonstration un autre résultat : tous les cycles de Carnot opérant entre les mêmes réservoirs thermiques présentent le même rendement. Ce résultat implique que le rendement thermique d'un cycle de Carnot ne dépend que des températures  $T_H$  et  $T_B$ . Ainsi,

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{Q_B}{Q_H} = f(T_B, T_H)$$

où  $\eta_{\text{Carnot}}$  : rendement du cycle de Carnot

Il existe en conséquence une relation entre  $Q_H$ ,  $Q_B$ ,  $T_H$  et  $T_B$ . Lord Kelvin proposa la relation suivante qui définit l'échelle de température absolue

$$\frac{Q_H}{Q_B} = \frac{T_H}{T_B} \quad (3-8)$$

Pour des machines opérant selon des cycles de Carnot, les relations (3-4), (3-6) et (3-7) donnant respectivement le rendement d'une machine thermique et les coefficients de performance d'un réfrigérateur et d'une pompe thermique, deviennent

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{Q_B}{Q_H} = 1 - \frac{T_B}{T_H} \quad (3-9)$$

$$\beta_{\text{Carnot}} = \frac{1}{\frac{Q_H}{Q_B} - 1} = \frac{1}{\frac{T_H}{T_B} - 1} \quad (3-10)$$

$$\beta_{\text{Carnot}} = \frac{1}{1 - \frac{Q_B}{Q_H}} = \frac{1}{1 - \frac{T_B}{T_H}} \quad (3-11)$$

**Exemple 3.2** On propose d'utiliser une source géothermique à 150 °C pour alimenter la chaudière d'une machine thermique. Le système absorbe un taux de transmission de chaleur de 50 kW. Le réservoir froid est à 20 °C. Quelle est la puissance nette maximale que l'on peut produire à partir de ce cycle ?

*Solution.*

Le travail maximal sera celui produit par une machine de Carnot. On a donc

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_B}{T_H} = 1 - \frac{293}{423} = 0,3073$$

$$\dot{W}_{\text{net}} = \eta_{\text{Carnot}} \dot{Q}_{\text{CH}} = 0,3073 * 50 = 15,4 \text{ kW}$$

Puisque le cycle de Carnot est le plus performant, il s'ensuit que l'énergie absorbée par une machine thermique ( $Q_H$ ) ne sera pas utilisée aussi efficacement dans le cas d'un autre type de cycle. Considérons deux machines donc, une machine de Carnot absorbant toutes deux la même chaleur  $Q_H$ , on aura

$$\begin{aligned}\eta_{Ca} &> \eta_{Ir}, \\ W_{me} &> W_{ir}, \\ Q_H &= Q_H \\ \Rightarrow W_{me} &> W_{ir}\end{aligned}$$

ou encore :

$$Q_{CB} - Q_{CB\,me} > Q_{CB} - Q_{CB\,ir} \Rightarrow Q_{CB\,ir} > Q_{CB\,me}$$

Ainsi, une part plus importante de l'énergie absorbée sera rejetée vers l'environnement par une machine irréversible.

### 3.7 L'inégalité de Clausius

Le second principe de la thermodynamique mène à une inégalité très importante, l'inégalité de Clausius

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (3-12)$$

L'égalité à la relation (3-12) s'applique aux cycles réversibles alors que l'inégalité concerne les cycles irréversibles.

Le calcul prévu par la relation (3-12) n'est pas aisé en général. Il y a toutefois une situation où il est particulièrement simple, nous pourrions ainsi vérifier le résultat (3-12) dans ce cas. Considérons une machine thermique effectuant ses transferts de chaleur de façon isotherme à  $T_H$  et  $T_B$  respectivement, l'intégrale de contour fermé devient

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_B}{T_B}$$

Pour un cycle de Carnot (cycle réversible) l'équation (3-8) donne

$$\frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_{B\,me}}{T_B} = 0$$

et ainsi, une partie du résultat est vérifiée.

$$\left| \oint \frac{\delta Q}{T} \right|_{me} = 0$$

D'autre part, si on présuppose que la machine irréversible absorbe la même chaleur  $Q_H$  que la machine de Carnot, il vient (voyez la section 3.6.1)

$$Q_{B\,ir} > Q_{B\,me}$$

Et en conséquence

$$\frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_F}{T_F} = 0$$

Alors

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

### 3.8 Entropie

Considérons les deux cycles réversibles illustrés à la figure 3.7

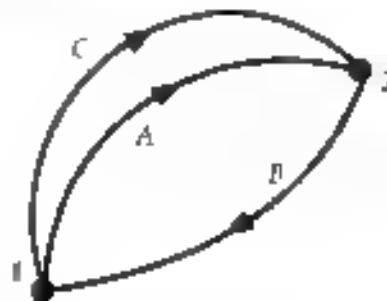


Figure 3.7 Deux cycles réversibles

Les évolutions sont A, B, C toutes trois réversibles. En conséquence les cycles formés des évolutions A-B (cycle I) et A-C (cycle II), le sont aussi. L'inégalité de Clausius pour chaque cycle devient

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_A + \int_2^1 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_B = 0$$

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_C + \int_2^1 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_B = 0$$

Puisque :

$$\left( \oint \frac{\delta Q}{T} \right)_I = \left( \oint \frac{\delta Q}{T} \right)_{II}$$

il vient

$$\int_1^2 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_A = \int_1^2 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_C$$

Comme aucune condition n'a été imposée sur le choix des évolutions A et C (sauf qu'elles sont réversibles), on conclut que le résultat ne dépend pas du chemin emprunté (A ou C) mais seulement des points de départ et d'arrivée (1 et 2). Ceci implique que l'on peut définir une fonction S qui prend des valeurs spécifiques en 1 et 2 de sorte que

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} \quad (3-13)$$

Comme la valeur que prend cette fonction ne dépend que de l'état (ici point) considéré, il s'agit d'une propriété thermodynamique ou variable d'état. Clausius inventa le nom d'entropie pour

désigner cette grandeur. L'équation (3-13) définit la variation d'entropie. Notons que pour employer cette relation l'intégrale doit s'effectuer selon un chemin réversible allant des deux états. Le choix du chemin n'est pas important, dans la mesure que celui-ci est réversible.

Si l'évolution que connaît le système est irréversible, il est toujours possible de calculer la variation d'entropie puisque l'entropie est une variable d'état. Considérant les états initial et final du système, on conçoit une évolution réversible qui relie ces états et on utilise l'équation (3-13) pour cette évolution. Si on considère une évolution réversible infinitésimale (3-13) devient,

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (3-14)$$

### 3.8.1 Entropie massique

Comme le calcul de la variation d'entropie fait intervenir le rapport d'une quantité extensive (la chaleur) et d'une grandeur intensive (la température), il s'ensuit que l'entropie est elle-même une variable thermodynamique extensive.

On définit donc l'entropie massique,  $s$ ,

$$s = \frac{S}{m} \quad \text{J/kg}^\circ\text{K} \quad (3-15)$$

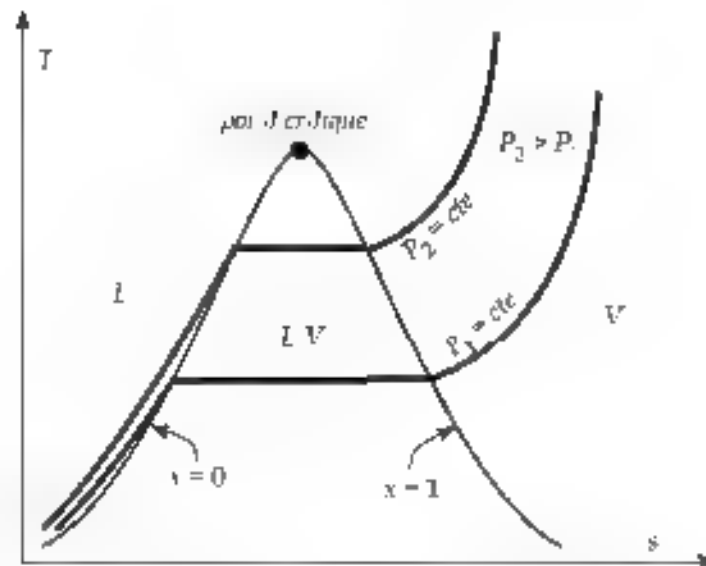
Alors, dans le cas d'un mélange liquide-vapeur

$$s = s_f + x s_{fg} \quad (3-16,$$

$$\text{et} \quad x = \frac{s - s_f}{s_g - s_f}$$

### 3.8.2 Diagramme $T-s$

Puisque l'entropie est une variable thermodynamique, elle peut servir à spécifier l'état d'un système. Si, en particulier, elle est couplée à la variable de température, on peut représenter l'état d'un système sur un diagramme  $T-s$  ou  $T-\phi$  dont l'importance en thermodynamique est comparable à celle du diagramme  $P-v$ .

Figure 3.8 Diagramme  $T-s$  pour une substance pure

La figure 3.8 représente un diagramme  $T-s$  sur lequel apparaissent les régions de liquide comprimé ( $L$ ), de mélange liquide-vapeur ( $L-V$ ) et de vapeur surchauffée ( $V$ ). On a aussi représenté deux évolutions isobares. On remarque que l'allure générale de ces évolutions dans ce type de diagramme  $s$  apparaît à celle qu'elles présentent dans un diagramme  $T-v$ .

L'équation (3-14) peut s'écrire :

$$\delta Q = T ds \quad (3-17)$$

de sorte qu'on trouve

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 T ds \quad (3-18)$$

Ainsi, la chaleur échangée lors d'une évolution réversible peut être considérée comme la surface sous la courbe représentant cette évolution dans un diagramme  $T-s$  (figure 3.9).

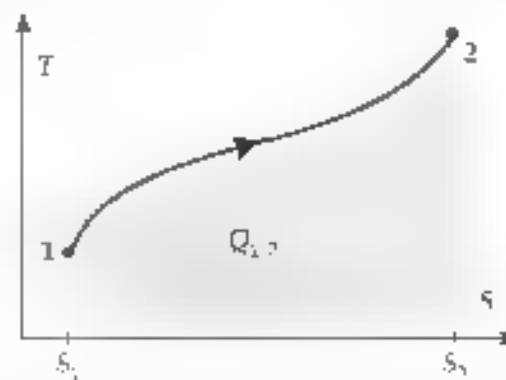


Figure 3.9 Représentation graphique de la chaleur échangée

Puisque la température est toujours positive, le signe de  $\delta Q$  à l'équation (3.17) est spécifié par le signe de  $dS$ . Ainsi, à une évolution progressant vers la droite sur le diagramme  $T-S$  sera associée une chaleur positive et, à une évolution vers la gauche, une chaleur négative.

Établissons maintenant un résultat important. Une évolution adiabatique est une évolution sans échange de chaleur. Si de plus, l'évolution est réversible, on peut écrire

$$\delta Q = T dS = 0$$

c'est-à-dire :

$$S = \text{cte} \quad (3.19)$$

Ainsi, l'évolution **adiabatique réversible** est caractérisée par le fait que l'entropie se maintient constante. On dira d'elle qu'elle est *isentropique*.

**Exemple 3.3** Un cylindre contient de la vapeur saturée de R134a à  $10^\circ\text{C}$ . La vapeur est comprimée par un piston lors d'une évolution adiabatique réversible jusqu'à la pression de  $1,6\text{ MPa}$ . Calculez le travail massique effectué.

*Solution*

Sur le diagramme  $T-s$ , l'évolution prends l'allure suivante

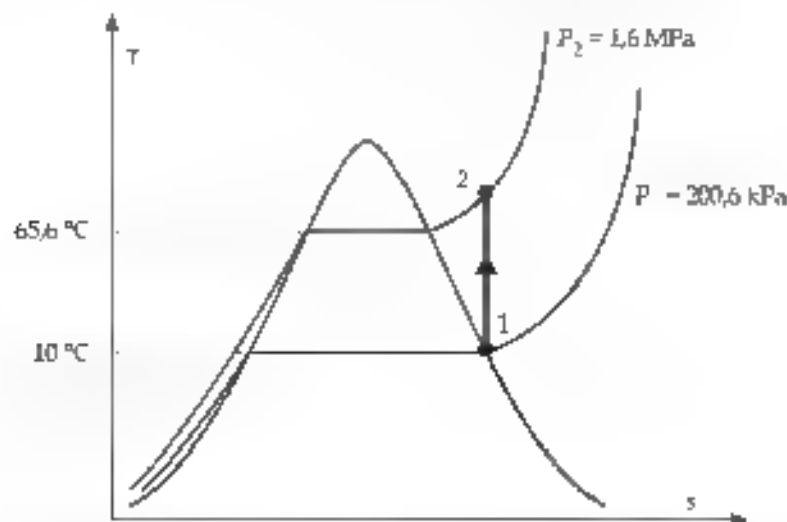


Figure 3.10 Évolution adiabatique réversible sur un diagramme  $T-s$

$$q_{1-2} = u_2 - u_1 + w_{1-2} = 0$$

$$\Rightarrow u_{1-2} = u_2 - u_1$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{tot 1} & \left\{ \begin{array}{l} T_1 = 10^\circ\text{C} \\ \gamma = 1 \\ P = P_1(10^\circ\text{C}) = 200,6 \text{ kPa} \\ u_1 = u_g(10^\circ\text{C}) = 372,69 \text{ kJ/kg} \\ s_1 = s_g(10^\circ\text{C}) = 1,7334 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{tot 2} & \left\{ \begin{array}{l} P = 1,6 \text{ MPa} \\ s_2 = s_1 = 1,7334 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \\ \text{vapeur surchauffée } T_2 = 65,6^\circ\text{C} \\ u_2 = 415,25 \text{ kJ/kg} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$u_{1-2} = u_2 - u_1 = 42,56 \text{ kJ/kg}$$

### 3.9 Représentation du cycle de Carnot sur un diagramme $T-s$

Rappelons les évolutions d'un cycle de Carnot s'appliquant à une machine thermique

- a) 1-2 : compression adiabatique réversible
- b) 2-3 : absorption de chaleur isotherme réversible à  $T = T_H$
- c) 3-4 : expansion adiabatique réversible
- d) 4-1 : rejet de chaleur isotherme réversible à  $T = T_B$

Rappelons qu'une évolution isotherme apparaîtra comme une droite horizontale dans un diagramme  $T-s$  et que l'évolution isentropique, comme une droite verticale. Comme la chaleur est absorbée durant l'évolution 2-3, le point 3 devra se situer à la droite du point 2 sur le diagramme ( $Q_{2,3} > 0$ ). De façon similaire, on établit que le point 1 se situe à la gauche du point 4 sur le diagramme ( $Q_{4,1} < 0$ ). Comme les évolutions adiabatiques réversibles sont isentropiques, le cycle de Carnot d'une machine thermique prend l'allure illustrée à la figure 3.11a

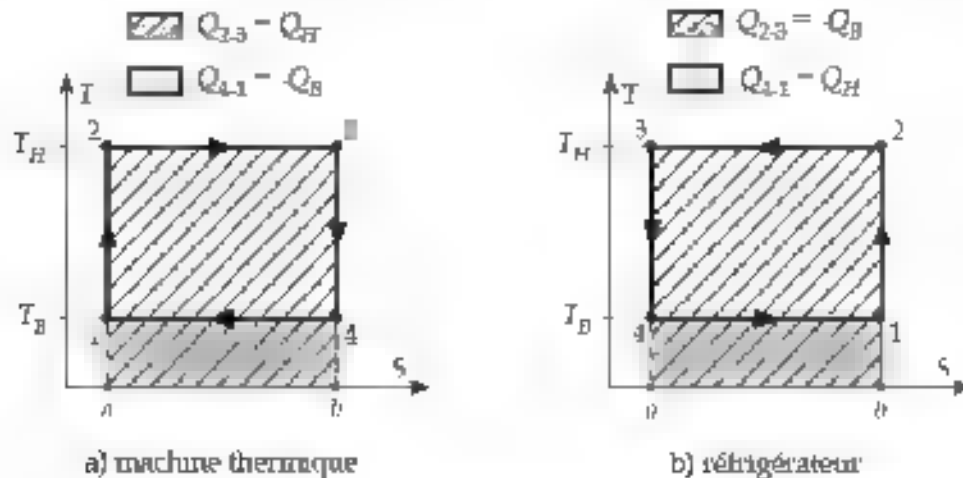


Figure 3.11 Cycles de Carnot pour la machine thermique et le réfrigérateur

La surface a-2-3-b (surface hachurée de la figure 3.11 a) représente la chaleur absorbée  $Q_{2,3}$  provenant du réservoir chaud  $Q_H = Q_{2,3}$ . La surface a-1-4-b (surface en gris) représente la chaleur rejetée  $Q_{4,1}$  vers le réservoir froid ( $Q_B = |Q_{4,1}|$ ). La surface délimitée par les courbes d'évolutions représente alors la chaleur nette échangée (surface hachurée sur fond blanc) ( $Q_{net} > 0$ ). Rappelons qu'en vertu du premier principe on a  $Q_{net} = W_{net}$ .

Si le cycle de la figure 3.11 a) est parcouru en sens inverse, on obtient le cycle de la figure 3.11 b).

La numérotation des points a été changée mais le cycle a la même forme. Toutefois, puisque la chaleur est absorbée à  $T = T_B$  (surface a-3-2-b) et rejetée à  $T = T_H$  (surface a-4-1-b), il s'agit d'un cycle de réfrigération comme en font foi les signes des chaleur et travail nets ( $Q_{net} = W_{net} < 0$ ).

Notons que la forme du cycle de Carnot est indépendante de la nature du système. La substance effectuant le cycle peut être un gaz parfait ou une substance qui se vaporise et se condense comme de l'eau. Souvent le cycle est situé sous la « cloche » du diagramme  $T-s$  pour faire usage du fait que l'évolution isotherme est aussi une évolution isobare, simple à réaliser (figure 3.12).



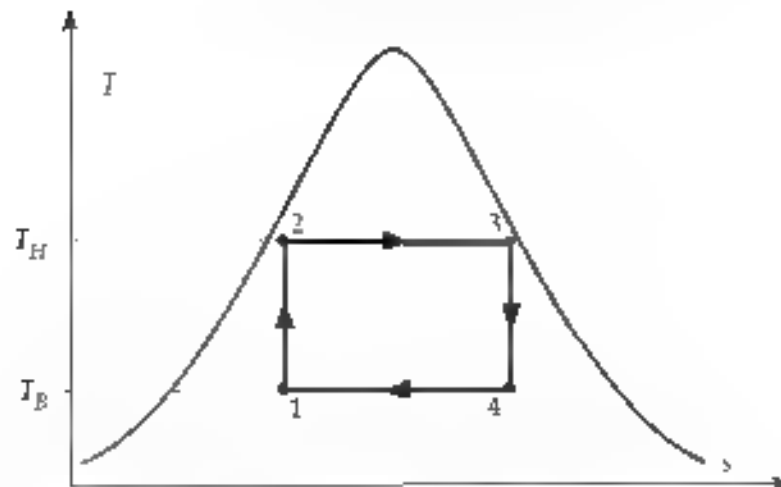


Figure 3.12 Cycle de Carnot avec un mélange liquide-vapeur

### 3.10 Le principe d'accroissement de l'entropie

La figure 3.14 illustre un cycle constitué d'une évolution irréversible A, et d'une évolution réversible B.

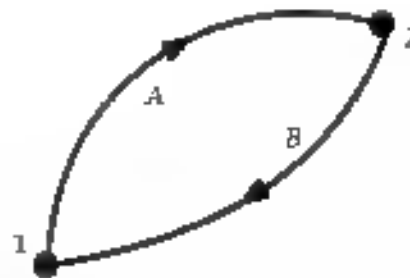


Figure 3.13 Cycle irréversible

Puisque le cycle est irréversible l'inégalité de Clausius s'écrit

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}_A + \int_2^1 \frac{\delta Q}{T}_B < 0$$

Le chemin B étant réversible on trouve

$$\int_1^2 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_B = S_2 - S_1$$

alors

$$\int_1^2 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_A + (S_1 - S_2) < 0$$

c'est-à-dire

$$S_2 - S_1 > \int_1^2 \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_A \quad (3.20)$$

pour une évolution infinitésimale

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (3-21)$$

Les résultats de la section 3.8 ainsi que ces derniers peuvent donc être combinés

$$S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \quad (3-22)$$

$$\boxed{dS \geq \frac{\delta Q}{T}} \quad (3-23)$$

avec  $\geq$  évolution irréversible  
 $=$  évolution réversible

En particulier, pour une évolution adiabatique, l'équation (3-22) devient

$$\Delta S_{\text{total}} = (S_2 - S_1)_{\text{total}} \geq 0 \quad (3-24)$$

L'environnement d'un système est cette *partie du monde extérieur* qui effectue des échanges énergétiques avec le système. Concevons un macro-système constitué du système et de son environnement. En vertu de ce qui précède, ce macro-système serait isolé puisque tous les échanges énergétiques entre le système et son environnement, seraient confinés : notons que les limites de l'environnement et donc du macro-système, dépendent de l'évolution considérée. En conséquence toutes les évolutions de ce macro-système sont par définition adiabatiques, la relation (3-24) s'appliquant à celui-ci. Si la variation d'entropie du macro-système est désignée par  $\Delta S_{\text{global}}$ , il vient

$$\boxed{\Delta S_{\text{global}} = \Delta S_{\text{sys}} + \Delta S_{\text{env}} \geq 0} \quad (3-25)$$

où  $\Delta S_{\text{sys}}$  : variation d'entropie du système  
 $\Delta S_{\text{env}}$  : variation d'entropie de l'environnement

Les énoncés du second principe que nous avons considérés jusqu'alors ne s'appliquaient qu'aux cycles de machine thermique et de réfrigération. Faisant défaut en particulier une formulation de celui-ci s'appliquant aux évolutions non cycliques. Le résultat (3-25) constitue justement cette formulation. Elle stipule que toute transformation du système s'accompagne d'une augmentation de l'entropie globale sauf dans le cas d'une évolution réversible, auquel cas, l'entropie globale se maintient.

Puisque toutes les évolutions réelles sont irréversibles, on observe toujours une augmentation de l'entropie globale. Ce nouvel énoncé du second principe est évidemment plus général que ceux de Kelvin-Planck et de Clausius : on le privilégie donc, en général, aux deux autres.

Le résultat (3-25) explique pourquoi un grand nombre de processus qui seraient réalisables au sens du premier principe, ne sont dans les faits jamais observés. Le transfert de chaleur de l'air froid vers la tasse de café chaud ne se produit jamais même s'il respecte le principe de

conservation d'énergie parce qu'un processus de ce type violerait le second principe. Il donnerait lieu à une variation d'entropie globale négative.

Le calcul de  $\Delta S_{\text{env}}$  peut en général être délicat et laborieux. Il arrive souvent toutefois que l'environnement du système soit un réservoir thermique. Par définition, ce dernier ne connaît que des évolutions isothermes. Si la température du réservoir est  $T_0$  et que durant l'évolution il absorbe la chaleur  $Q_{\text{env}}$ , alors

$$\Delta S_{\text{env}} = \frac{Q_{\text{env}}}{T_0} \quad (3-26)$$

Puisque la chaleur absorbée par l'environnement correspond à la chaleur perdue par le système,

$$Q_{\text{env}} = -Q_{1-2}$$

et

$$\Delta S_{\text{env}} = \frac{Q_{1-2}}{T_0} \quad (3-27)$$

**Exemple 3.4** Supposons que 2 kg d'eau liquide saturée à 100 °C sont vaporisés jusqu'à l'état de vapeur saturée lors d'un chauffage isobare à l'aide d'un élément chauffant à 250 °C. Quelle est l'augmentation globale d'entropie lors de cette évolution.

*Solution*

État 1	État 2
$T_1 = 100 \text{ °C}$	$T_2 = 100 \text{ °C}$
$P_1 = 101,42 \text{ kPa}$	$P_2 = 101,42 \text{ kPa}$
$v_1 = 0,001044 \text{ m}^3/\text{kg}$	$v_2 = 1,6719 \text{ m}^3/\text{kg}$
$u_1 = 418,99 \text{ kJ/kg}$	$u_2 = 2506,015 \text{ kJ/kg}$
$h_1 = 419,10 \text{ kJ/kg}$	$h_2 = 2675,57 \text{ kJ/kg}$
$s_1 = 1,3070 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$	$s_2 = 7,3541 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$

$$Q_{1-2} = m(u_2 - u_1) + mP(v_2 - v_1) \quad (\text{ou encore: } Q_{1-2} = m(h_2 - h_1))$$

$$Q_{1-2} = 4512,94 \text{ kJ}$$

$$\Delta S_{\text{sys}} = m(s_2 - s_1) = 12,0492 \text{ kJ/K}$$

$$\Delta S_{\text{env}} = \frac{Q_{12}}{T_0} = 18,6265 \text{ kJ/K}$$

$$\Delta S_{\text{global}} = \Delta S_{\text{sys}} + \Delta S_{\text{env}} = 3,4677 \text{ kJ/K}$$

### 3.11 Relations $T ds$

Nous allons établir deux relations qui s'avèreront utiles pour la suite. La forme différentielle du premier principe s'écrit

$$\delta q = d + \delta u$$

Si le travail est un travail d'expansion et que l'évolution est réversible, on peut écrire

$$\delta w = P dv, \quad \delta q = T ds$$

Le premier principe devient alors

$$T ds = du + P dv \quad (3-28)$$

Considérons maintenant l'enthalpie massique,  $h$

$$h = u + Pv \\ dh = du + P dv + v dP$$

En combinant cette dernière expression avec l'équation (3-28),

$$\begin{aligned} dh &= T ds + v dP \\ T ds &= dh - v dP \end{aligned} \quad (3-29)$$

### 3.12 Variation d'entropie d'un gaz parfait.

Pour un gaz parfait, on a :

$$\begin{aligned} du &= C_v dT && \text{(équation (2-34))} \\ P &= \frac{RT}{v} && \text{(loi des gaz parfaits)} \end{aligned}$$

En insérant ces expressions dans l'équation (3-28), on trouve

$$T ds = C_v dT + RT \frac{dv}{v}$$

Si on divise par la température et qu'on intègre de part et d'autre l'équation précédente devient

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_v \frac{dT}{T} + R \ln \frac{v_2}{v_1}$$

Si la chaleur spécifique est considérée constante sur l'intervalle de température, on obtient

$$s_2 - s_1 = C_v \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right) \quad (3-30)$$

Par ailleurs, on a aussi  $dh = C_p dT$  et  $n = \frac{RT}{P}$

Si ces expressions sont insérées dans l'équation (3.29) on trouve

$$Tds = C_p dT - RT \frac{dP}{P}$$

En procédant comme précédemment, il vient

$$s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p dT}{T} - R \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right)$$

Et, si on considère la chaleur spécifique  $C_p$  constante entre  $T_1$  et  $T_2$

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \quad (3.31)$$

Les équations (3.30) et (3.31) permettent toutes deux d'établir la variation d'entropie massique d'un gaz parfait

**Exemple 3.5** Calculez la variation d'entropie massique lorsque l'air est chauffé de 300 K à 600 K et que la pression chute de 400 kPa à 300 kPa.

*Solution*

$$C_p = 1,005 \frac{\text{kJ}}{\text{kg.K}} \quad R = 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kg.K}}$$

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right) = 0,7781 \frac{\text{kJ}}{\text{kg.K}}$$

*Un nouveau résultat*

Nous avons vu au chapitre 2 que pour un gaz parfait connaissant une évolution adiabatique quasi statique, la pression et le volume sont reliés par :

$$Pv^\gamma = \text{cte} \quad (3.32)$$

où

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Puisqu'une évolution réversible est à fortiori quasi statique. Il s'ensuit que pour un processus isentropique, adiabatique réversible la relation (3.32), peut être employée.

**Exemple 3.6** Du méthane gaz parfait est comprimé au cours d'une évolution adiabatique réversible à partir de 200 kPa et 30 °C jusqu'à 500 kPa. Calculez le travail et la chaleur massiques.

*Solution*

On a  $R = 0,51835 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$   $C_v = 1,7354 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$   $\kappa = 1,299$

Évolution isentropique  $\Rightarrow P v^\kappa = \text{cte}$  (évolution polytropique d'exposant  $\kappa$ )

On peut donc employer l'équation (2-12).

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \Rightarrow T = 374,14 \text{ K}$$

i) Travail

$$w_{1 \rightarrow 2} = \frac{R}{1-\kappa} T_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = 123,3 \text{ kJ/kg} \quad \text{équation (2-10)}$$

ii) Chaleur

$$q_{1 \rightarrow 2} = 0 \quad (\text{adiabatique})$$

**Exemple 3.7 :** Un cycle de Carnot fonctionnant entre 300 K et 1200 K utilise 0,5 kg d'air comme système. La chaleur absorbée par l'air est de 50 kJ et la pression minimale atteinte par le système est de 100 kPa.

- Établissez la pression en chacun des points du cycle;
- calculez la chaleur et le travail pour chaque évolution;
- calculez le rendement et montrez qu'il correspond à sa valeur théorique.

*Solution*

a) et b) Il s'agit d'un cycle de Carnot, alors en ce qui a trait aux différentes évolutions,

$$\left. \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} S = \text{cte} \text{ et gaz parfait, donc } P v^\kappa = \text{cte} \\ \\ \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \rightarrow 3 \\ 4 \rightarrow 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} T = \text{cte} \text{ et gaz parfait, donc } P v = \text{cte} \text{ et } \Delta u = 0 \end{array}$$

Les diagrammes  $P-v$  et  $T-S$  du cycle en question sont illustrés ci-dessous.

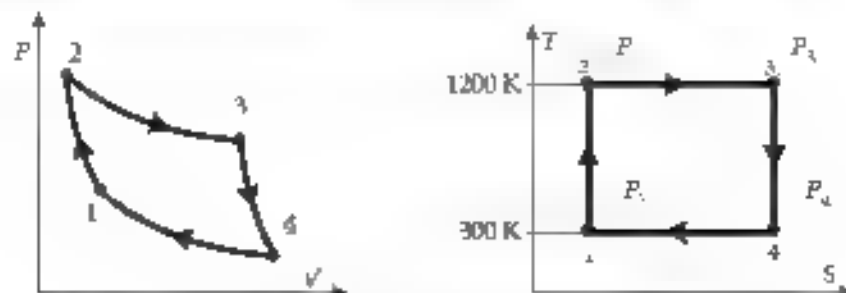


Figure 3.14 Cycle de Carnot d'un gaz parfait.

Se référant à l'énoncé et à la figure 3.14, on peut écrire

$$T = T_3 = 1300 \text{ K} \quad T_1 = T_4 = 300 \text{ K} \quad P_3 = 100 \text{ kPa} \quad Q_{2,3} = 50 \text{ kJ}$$

De plus  $R = 0,2870 \text{ kJ/kg K}$  ;  $C_v = 0,7165 \text{ kJ/kg K}$  ,  $k = 1,40$

### 3-4 détente isentropique

$$\frac{T_2}{T} = \left( \frac{P_2}{P} \right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow P_2 = 12,8 \text{ MPa}$$

puisque

$$Q_{2,3} = 0$$

$$W_{2,3} = m(u_3 - u_2) = mC_v(T_3 - T_2) = 322,43 \text{ kJ}$$

Notons qu'en ce qui concerne le travail on peut aussi procéder ainsi

$$W_{2,3} = mR \cdot \frac{T_2 - T_3}{1 - k} = 322,43 \text{ kJ}$$

### 2-3 détente isotherme à $T = T_H$

$$Q_{2,3} = W_{2,3} = 50 \text{ kJ}$$

or

$$W_{2,3} = mRT_H \ln \left( \frac{P_2}{P_3} \right) \Rightarrow P_2 = 17,1 \text{ MPa}$$

puisque

$$Q_{2,3} = T_H(s_3 - s_2)$$

il vient aussi

$$s_3 - s_2 = 0,04667 \text{ kJ/K}$$

### 1-2 compression isentropique

$$\frac{T_1}{T} = \left( \frac{P_1}{P} \right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow P = 133,3 \text{ kPa}$$

$$W_{1,2} = m(u_2 - u_1) = mC_v(T_2 - T_1) = 322,43 \text{ kJ}$$

### 4-1 compression isotherme à $T = T_F$

$$Q_{4,1} = T_F(s_1 - s_4) = T_F(s_2 - s_3) = 12,5 \text{ kJ}$$

et

$$W_{4,1} = Q_{4,1} = 12,5 \text{ kJ}$$

c)

$$Q_H = Q_{2,3} = 50 \text{ kJ}$$

$$Q_F = |Q_{4,1}| = 12,5 \text{ kJ}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_F}{Q_H} = 0,75$$

on vérifie que cela correspond bien à :

$$\eta_{th} = \eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_B}{T_A} = 0,75$$

### 3.13 Variation d'enthalpie lors d'une évolution adiabatique réversible.

Considérons l'équation (3-29) ,

$$Tds = dh - vdp$$

Pour une évolution isentropique ( $ds=0$ ) il vient

$$dh = vdp$$

alors :

$$h_2 - h_1 = \int_{P_1}^{P_2} v dp \quad (3-33)$$

Si de surcroît la substance est incompressible (liquide comprimé, par exemple), alors

$$v = c/c$$

et

$$h_2 - h_1 = v (P_2 - P_1) \quad (3-34)$$

Or, pour un fluide en écoulement lorsque l'on néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de gravité, et que le volume de contrôle ne comporte qu'une entrée et une sortie, le premier principe s'écrit (équation (2-5))

$$\dot{q} - \dot{w}_{cv} = \dot{m}(h_2 - h_1)$$

Et pour une évolution adiabatique

$$\dot{w}_{cv} = \dot{m}(h_1 - h_2) \quad (3-35)$$

Souvent la compression d'un liquide lors du passage dans une pompe est représentée par une évolution adiabatique réversible. Alors pour une évolution de pompage d'un liquide, on peut combiner les équations (3-34) et (3-35) pour trouver

$$\dot{w}_{cv} = v (P_2 - P_1) \quad (3-36)$$



**Exemple 3.8** Calculez le travail par unité de masse nécessaire pour comprimer de façon isentropique de l'eau de 100 kPa à un MPa, en supposant que l'état initial est  
a) un liquide saturé  
b) une vapeur saturée.

*Solution*

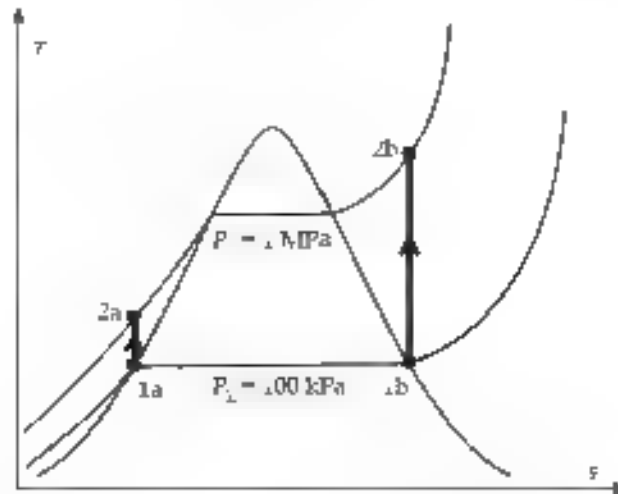


Figure 3.15 Deux compressions de 100 kPa à 1 MPa dans un diagramme  $T-s$

, Pour la compression du liquide saturé (évolution 1a-2a, on peut utiliser le résultat (3.36)

Il s'agit d'un fluide incompressible, on peut donc écrire

$$v = v_{\text{liq}} = v_f, 100 \text{ kPa} = 0.001043 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$w_{10 \rightarrow 2a} = v_{1a} (P_2 - P_1) \\ 0.0011043 (100 - 1000) = -0.94 \text{ kJ/kg}$$

ii) Pour la vapeur saturée on doit procéder autrement puisque la vapeur est compressible. Il faut établir l'enthalpie aux deux états et utiliser (3.35).

$$\text{État 1b} \begin{cases} P_1 = 100 \text{ kPa} \\ x_{1a} = 1 \end{cases} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} h_{1b} = 2674.95 \text{ kJ/kg} \\ s_{1b} = 7.3588 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \end{cases}$$

$$\text{État 2b} \begin{cases} P_2 = 1 \text{ MPa} \\ s_{2b} = s_{1b} = 7.3588 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \end{cases} \quad \text{alors} \quad h_{2b} = 3193.52 \text{ kJ/kg}$$

$$w_{1b \rightarrow 2b} = h_{2b} - h_{1b} = 518.57 \text{ kJ/kg}$$

On constate que de l'eau sous forme vapeur requiert un travail 500 fois plus important que de l'eau sous forme liquide pour être comprimée entre les mêmes pressions.



## 3.14 EXERCICES

**Problème 1** On se propose de chauffer une maison pendant l'hiver avec une thermopompe. Il faut garder la maison à  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  en tout temps. On estime que lorsque la température extérieure descendra à  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$  la maison perdra  $75\text{ kW}$ . Quelle est la puissance électrique minimale requise pour entraîner la thermopompe ?

Rép.  $W = 2,558\text{ kW}$

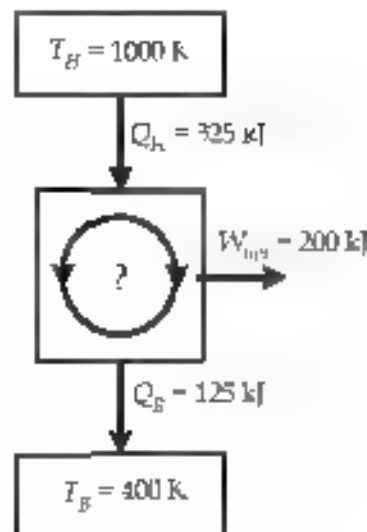
**Problème 2** Un réfrigérateur de Carnot fonctionne dans une pièce où la température est de  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Il faut retirer  $5\text{ kW}$  de la chambre froide pour conserver sa température à  $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Quelle puissance de moteur faut-il pour faire fonctionner ce réfrigérateur ?

Rép. :  $W = 1,03\text{ kW}$

**Problème 3** On se propose de construire une machine thermique cyclique pour fonctionner dans l'océan à un endroit où la température de l'eau est de  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  près de la surface, et de  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$  en profondeur. Quel est le rendement thermique maximal possible d'une telle machine ?

Rép. :  $\eta_{th} = 0,051$

**Problème 4** On utilise une machine cyclique pour faire passer de la chaleur d'un réservoir chaud à un réservoir froid (voir figure ci-dessous). Déterminez s'il s'agit d'une machine thermique ou d'un cycle de réfrigération et dites si une telle machine est réversible, irréversible ou impossible à réaliser.



Rép. : Machine thermique ; impossible

**Problème 5** Soit une machine thermique de Carnot qui fonctionne entre des réservoirs dont les températures sont de  $1\,000\text{ °C}$  et  $0\text{ °C}$  et qui reçoit  $1\,000\text{ kJ}$  de chaleur du réservoir chaud.

- Représentez le cycle dans un diagramme  $T-s$ .
- Calculez le travail net et le rendement thermique de ce cycle.
- Calculez la variation d'entropie des réservoirs chaud et froid.

Rép. b)  $W_{\text{net}} = 785,6\text{ kJ}$

c)  $\Delta S_{\text{chaud}} = -0,785\text{ kJ/K}$ ,  $\Delta S_{\text{froid}} = +0,785\text{ kJ/K}$

**Problème 6** Une thermopompe de Carnot utilise du R134a comme fluide moteur. De la chaleur est cédée par le R134a à  $40\text{ °C}$  et pendant cette évolution, il passe de l'état de vapeur saturée à l'état de liquide saturé. On fournit de la chaleur au R134a lorsqu'il est à  $0\text{ °C}$ .

- Représentez ce cycle dans un diagramme  $T-s$ .
- Calculez le titre au début et à la fin de l'évolution isotherme à  $0\text{ °C}$ .
- Calculez le coefficient de performance du cycle.

Rép. b)  $x_4 = 0,262$ ,  $x_3 = 0,978$

c)  $\beta = 7,82$

**Problème 7** Soit une machine de Carnot qui utilise de la vapeur d'eau comme fluide moteur et qui a un rendement thermique de  $25\%$ . De la chaleur est transmise au fluide moteur à  $300\text{ °C}$  et pendant cette évolution, l'eau passe de l'état de liquide saturé à l'état de vapeur saturée.

- Représentez ce cycle dans un diagramme  $T-s$ .
- Calculez le titre de l'eau au début et à la fin du processus du refroidissement isotherme.
- Calculez le travail net fourni par kilogramme d'eau.

Rép. b)  $x_1 = 0,2763$ ,  $x_4 = 0,7798$

c)  $w_{\text{net}} = 351,1\text{ kJ/kg}$

**Problème 8** Un cylindre de  $10\text{ L}$  fermé par un piston contient de la vapeur saturée de R134a à  $20\text{ °C}$ . On augmente la force extérieure qui agit sur le piston pour comprimer le gaz de façon adiabatique et réversible jusqu'à ce qu'il atteigne une pression de  $1,8\text{ MPa}$ . Calculez le travail effectué pendant l'évolution.

Rép.  $W_{\text{net}} = -3,61\text{ kJ}$

**Problème 9** Un cylindre isolé et fermé par un piston contient du R134a à  $10\text{ °C}$ . On déplace le piston pour comprimer la substance par un procédé réversible jusqu'à ce que la pression atteigne  $2\text{ MPa}$ . La température est alors de  $70\text{ °C}$ . Au cours de l'évolution, il y a  $400\text{ kJ}$  de travail fourni au système. Quel était le volume initial du cylindre?

Rép.  $V_1 = 0,596\text{ m}^3$

**Problème 10** Un cylindre isolé et fermé par un piston contient du R134a à 600 kPa et 40 °C dans un volume de 100 L. Le R134a se détend et déplace le piston jusqu'à ce que la pression dans le cylindre ne soit plus que de 100 kPa. On affirme qu'un travail de 75 kJ est effectué pendant cette évolution. Est-ce possible ?

Rép.  $\Delta S_{\text{général}} = 0,0872 \text{ kJ/K}$  , possible

**Problème 11** Un cylindre fermé par un piston contient de R134 à 200 kPa et 20 °C dans un volume de 1,5 m<sup>3</sup>. On comprime le gaz jusqu'à une température finale de 40 °C en lui fournissant un travail de 750 kJ. Pendant le procédé, 1 500 kJ de chaleur sont cédés au milieu ambiant à 20 °C. Une telle évolution est-elle possible ? Reprenez le calcul si le travail est de 400 kJ.

Rép. Premier cas :  $\Delta S_{\text{général}} = 0,716 \text{ kJ/K}$  ; possible

Deuxième cas : impossible.

**Problème 12** 10 kg de R134a sont initialement à 100 °C à un titre de 70 %. Le système se détend jusqu'à une pression de 200 kPa suivant la réception de 220 kJ de chaleur provenant d'un réservoir thermique à 110 °C. On affirme que le système effectue 80 kJ de travail sur le milieu ambiant pendant le procédé. Est-ce possible ?

Rép.  $\Delta S_{\text{général}} = 2,10 \text{ kJ/K}$  ; possible

**Problème 13** Une masse de 0,5 kg d'air dans un cylindre à 800 kPa et 1 000 K se détend jusqu'à 100 kPa au cours d'une évolution isotherme et réversible. Calculez la chaleur échangée ainsi que la variation d'entropie de l'air.

Rép. ,  $Q_{1-2} = 298,4 \text{ kJ}$  ;  $\Delta S_{\text{air}} = 0,2984 \text{ kJ/K}$

**Problème 14** Soit une machine cyclique de Carnot ayant comme fluide moteur un kg d'air dans un ensemble cylindre-piston. Cette machine fonctionne entre des réservoirs à 1 000 K et 300 K. Au début de l'évolution de réchauffement à haute température, la pression est de 1 MPa et pendant l'évolution, le volume triple. Analysez chacune des quatre évolutions du cycle et calculez

- La pression, le volume et la température à chaque état
- le travail et la chaleur pour chaque évolution.

Rép. a)  $P_1 = 14,8 \text{ kPa}$  ,  $T_1 = 300 \text{ K}$  ;  $V_1 = 5,82 \text{ m}^3$   
 $P_2 = 1000 \text{ kPa}$  ,  $T_2 = 1000 \text{ K}$  ,  $V_2 = 0,287 \text{ m}^3$   
 $P_3 = 333 \text{ kPa}$  ,  $T_3 = 1000 \text{ K}$  ,  $V_3 = 0,861 \text{ m}^3$   
 $P_4 = 4,92 \text{ kPa}$  ,  $T_4 = 300 \text{ K}$  ,  $V_4 = 17,48 \text{ m}^3$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } W_{1,2} &= 501,5 \text{ kJ} \quad Q_{1,2} = 0 \\
 Q_{2,3} &= W_{2,3} = 315 \text{ kJ} \\
 W_{3,4} &= 501,5 \text{ kJ} \quad Q_{3,4} = 0 \\
 Q_{4,1} &= W_{4,1} = 94,8 \text{ kJ}
 \end{aligned}$$

**Problème 15** Un cylindre fermé par un piston contient 0,4 kg d'argon à 100 kPa et 300 K. On comprime le gaz jusqu'à 600 kPa au cours d'une évolution réversible. Calculez le travail requis si l'évolution est

- a) adiabatique
- b) isotherme
- c) polytropique d'exposant  $n = 1,3$

$$\begin{aligned}
 \text{Rép. a) } W_{1,2} &= 39,24 \text{ kJ} \\
 \text{b) } W_{1,2} &= 44,76 \text{ kJ} \\
 \text{c) } W_{1,2} &= 42,64 \text{ kJ}
 \end{aligned}$$

**Problème 16** Un cylindre fermé par un piston contient 1 m<sup>3</sup> d'air aux conditions ambiantes de 100 kPa et 20 °C. On comprime l'air jusqu'à 800 kPa au cours d'une évolution réversible et polytropique d'exposant  $n = 1,2$ . L'air retourne ensuite à 100 kPa au moyen d'un procédé adiabatique réversible.

- a) Illustrez les deux évolutions dans des diagrammes  $P-n$  et  $T-s$
- b) Calculez la température finale et le travail net
- c) Quelle serait la chaleur absorbée par l'air pour revenir à l'état initial suivant une évolution isobare ?

$$\begin{aligned}
 \text{Rép. : b) } T_2 &= 228,9 \text{ K} \quad W_{1-3} = 48,8 \text{ kJ} \\
 \text{c) } Q_{3-1} &= 76,9 \text{ kJ}
 \end{aligned}$$

**Problème 17** De la vapeur d'eau entre dans une turbine à 2,0 MPa et 400 °C puis elle se détend lors d'une évolution adiabatique réversible pour sortir de la turbine à 10 kPa. Les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle sont négligeables entre les conditions d'entrée et de sortie de la turbine. La puissance de sortie de la turbine est de 800 kW. Calculez le débit-massique de vapeur à travers la turbine.

$$\text{Rép. : } \dot{m} = 0,809 \text{ kg/s}$$

## CHAPITRE 4

### CYCLES DE PUISSANCE ET DE RÉFRIGÉRATION

#### Table des matières

<b>4.1</b>	<b>Le cycle de Rankine</b>	<b>3</b>
<b>4.2</b>	<b>Le cycle de Rankine avec surchauffe</b>	<b>6</b>
<b>4.3</b>	<b>Le cycle de Rankine à resurchauffe</b>	<b>8</b>
<b>4.4</b>	<b>Le cycle à régénération</b>	<b>9</b>
<b>4.5</b>	<b>Cycle de réfrigération à compression de vapeur</b>	<b>13</b>
4.5.1	Choix du réfrigérant	16
<b>4.6</b>	<b>Écart entre les cycles réels et les cycles idéaux</b>	<b>17</b>
4.6.1	Rendement adiabatique des turbines et des pompes	17
<b>4.7</b>	<b>Cycles de puissance à gaz et moteurs à combustion interne</b>	<b>20</b>
4.7.1	Quelques éléments sur les moteurs à combustion interne	21
4.7.2	Le cycle d'Otto ou de Beau de Rochas	22
4.7.3	Cycle de Diesel	24
<b>4.8</b>	<b>EXERCICES</b>	<b>27</b>





## 4.1 Le cycle de Rankine

Il a déjà été mentionné que le cycle de Carnot est le cycle plus performant impliquant deux réservoirs de température. Il est donc naturel, à prime abord, de considérer le cycle de Carnot pour les cycles de puissance. Toutefois les évolutions isothermes sont en général assez délicates à réaliser. Une façon élégante de contourner la difficulté est de situer le cycle sous la « cloche » de façon à ce que les transformations isothermes soient obtenues par des processus d'évaporation et de condensation isobares. On est donc amené à considérer l'emploi de substances qui connaissent des changements de phase et l'eau, du fait de son abondance, vient immédiatement à l'esprit. Un cycle de Carnot fonctionnant ainsi présenterait l'allure illustrée à la figure 4.1.

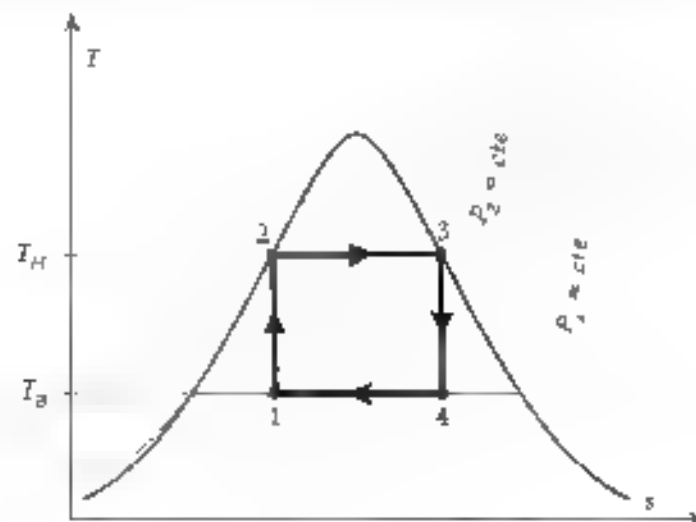


Figure 4.1 Cycle de Carnot avec de la vapeur d'eau

Certaines difficultés subsistent toutefois. À la sortie de la turbine (au point 4), la substance ne doit pas présenter un titre trop faible sans occasionner de problèmes de corrosion dans la turbine. On cherche typiquement à le maintenir au-dessus de 90%. Par ailleurs, on sait que le rendement thermique est d'autant plus élevé que l'écart entre  $T_H$  et  $T_B$  est important. Comme le montre la figure 4.2 ces deux considérations sont difficiles à concilier dans un cycle de Carnot.

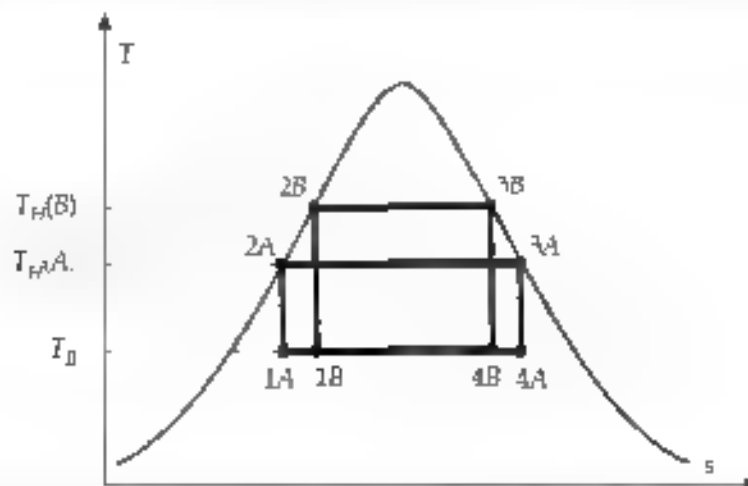


Figure 4.2 Effets de la modification de  $T_H$  sur le cycle de Carnot d'un mélange aqueux-vapeur

On présente deux cycles de Carnot qui ont la même température de condensation  $T_B$  mais dont la température d'évaporation  $T_H$  diffère d'un cycle à l'autre. On observe que le cycle B (1B-2B-3B-4B) présentera un rendement thermique plus élevé que le cycle A (1A-2A-3A-4A) parce que  $T_H(B) > T_H(A)$ . En contrepartie le titre à l'état 4A est plus élevé qu'à l'état 4B.

Finalement, et c'est le plus délicat, une pompe est conçue pour comprimer du liquide et un compresseur de gaz. La compression d'un mélange liquide-vapeur comme il est illustré aux figures 4.1 et 4.2 (évolution 1-2) pose problème. Rankine proposa de condenser la substance jusqu'à l'état de liquide saturé et conçut le cycle de machine illustré à la figure 4.3.

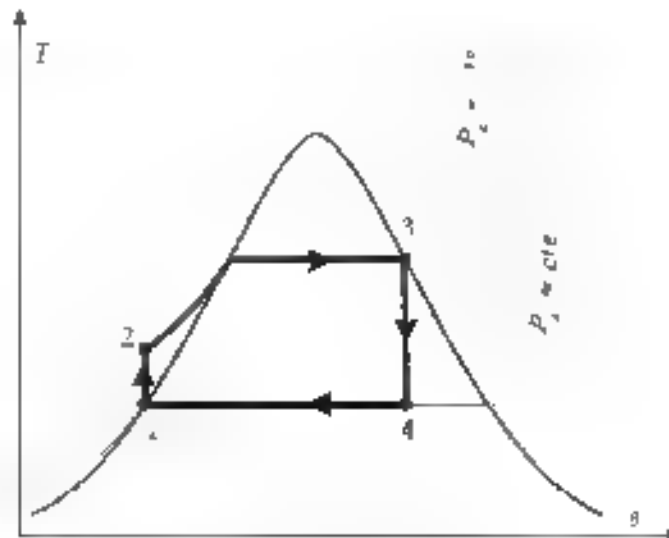


Figure 4.3 Cycle de Rankine de base

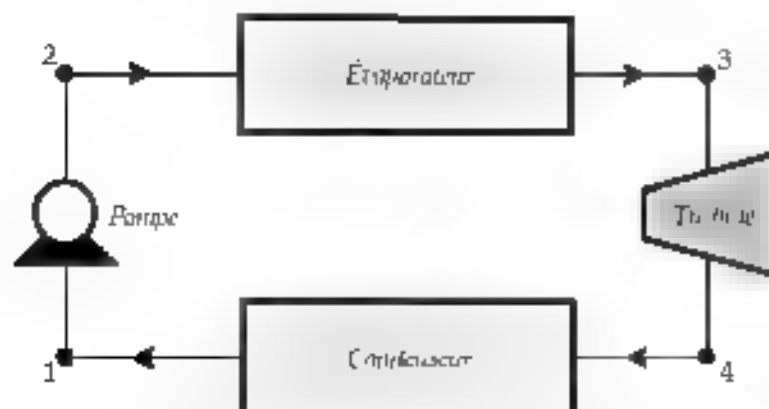


Figure 4.4 Éléments d'une machine simple

Rappelons que les passages du système dans la pompe et la turbine sont présumés adiabatiques et que les échanges de chaleur dans l'évaporateur et le condenseur se font sans travail. Comme les volumes de contrôle ne présentent qu'une entrée et une sortie, le premier principe prend la forme de l'équation (2-50)

$$q - w_{PK} = h_1 - h_2 \quad (4-1)$$

**Exemple 4.1** Soit un cycle de Rankine de base où l'eau est évaporée à 4 MPa. La pression du condenseur est de 10 kPa. Déterminez le rendement du cycle et comparez-le avec celui d'un cycle de Carnot fonctionnant entre les mêmes températures. Si le débit du fluide est de 20 kg/s, quelle est la puissance nette produite par le cycle?

*Solution*

Le cycle est illustré à la figure 4.3. Déterminons l'enthalpie massique en chaque point du cycle.

État 1	$\begin{cases} P = 10 \text{ kPa} \\ x = 0 \end{cases}$	alors	$\begin{aligned} T_1 &= 45,81 \text{ }^\circ\text{C} \\ h_1 &= 191,81 \text{ kJ/kg} \\ s_1 &= 0,6492 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \end{aligned}$
État 2	$\begin{cases} P_2 = 4 \text{ MPa} \\ s_2 = s_1 = 0,6492 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \end{cases}$	alors	$\begin{aligned} T_2 &= 45,94 \text{ }^\circ\text{C} \\ h_2 &= 195,84 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$
État 3	$\begin{cases} P_3 = 4 \text{ MPa} \\ x_3 = 1 \end{cases}$	alors	$\begin{aligned} T_3 &= 250,36 \text{ }^\circ\text{C} \\ h_3 &= 2800,90 \text{ kJ/kg} \\ s_3 &= 6,0697 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \end{aligned}$
État 4	$\begin{cases} P_4 = 10 \text{ kPa} \\ s_4 = s_3 = 6,0697 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \end{cases}$	alors	$\begin{aligned} T_4 &= 45,81 \text{ }^\circ\text{C} \\ h_4 &= 1920,71 \text{ kJ/kg} \\ x_4 &= 0,7228 \end{aligned}$

Ces valeurs peuvent être reportées dans un tableau où les quantités servant à caractériser l'état apparaissent en surbrillance.

	ÉTAT 1	ÉTAT 2	ÉTAT 3	ÉTAT 4
$P$	10 kPa	4 MPa	4 MPa	10 kPa
$T$	45,81 °C	45,94 °C	250,36 °C	45,81 °C
$s$	0,6492	0,6492	6,0697	6,0697
$x$	0	NA	1	0,7228
$h$	191,81	195,84	2800,90	1920,71

Travaux :	pompe	$w_p = h_2 - h_1 = 4,03 \text{ kJ/kg}$
i)	turbine	$w_T = h_3 - h_4 = 880,19 \text{ kJ/kg}$
ii)	travail net	$w_{\text{net}} = w_T - w_p = 876,16 \text{ kJ/kg}$
		$\dot{W}_{\text{net}} = \dot{m} w_{\text{net}} = 17523 \text{ kW}$

Chaleurs	$q_{23} = h_3 - h_2 = 2605,06 \text{ kJ/kg}$
	$q_{41} = h_4 - h_1 = 1728,90 \text{ kJ/kg}$

Rendement thermique	$\eta_{\text{th}} = \frac{w_{\text{net}}}{q_{23}} = 0,336$
---------------------	--

La figure 4.5 compare ce cycle avec un cycle de Carnot fonctionnant entre 45,81 °C et 250,36 °C (en grisé à la figure 4.5). Le rendement d'un tel cycle de Carnot est donné par

$$\eta_u = 1 - \frac{T_R}{T_H} = 1 - \frac{318,8}{523,4} = 0,391$$

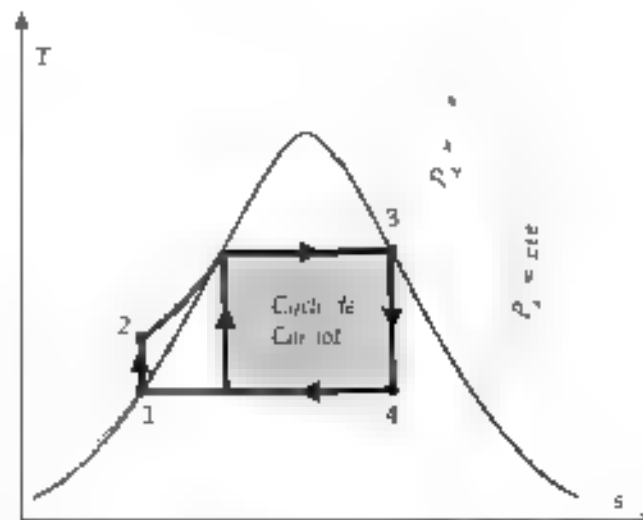


Figure 4.5 Comparaison entre le cycle de Rankine de l'exemple 4.1 et un cycle de Carnot

## 4.2 Le cycle de Rankine avec surchauffe

Dans le cas de l'exemple précédent, on observe que le titre à la sortie de la turbine est plutôt faible (72,3%). Une façon de palier ce problème est d'admettre que la substance soit amenée à l'état de vapeur surchauffée avant de lui permettre de se détendre dans la turbine : c'est le cycle de Rankine avec surchauffe (figure 4.6).

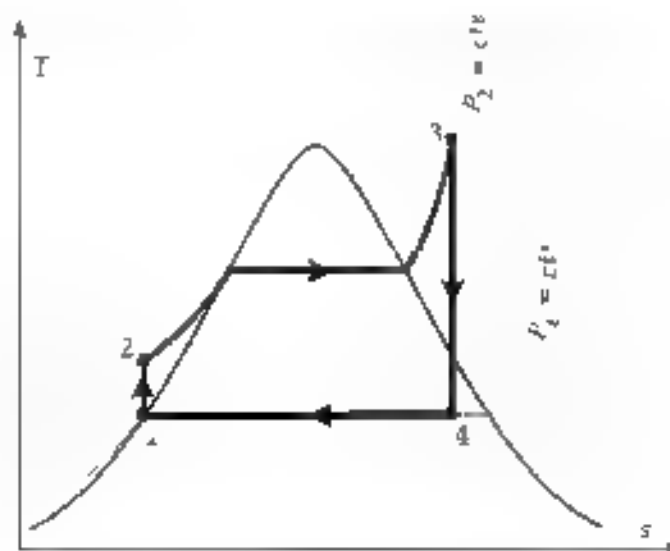


Figure 4.6 Cycle de Rankine avec surchauffe

**Exemple 4.2** Soit un cycle de Rankine avec surchauffe où la vapeur d'eau sort de la chaudière et entre dans la turbine à 4 MPa et 400 °C. La pression du condenseur est de 10 kPa. Déterminez le rendement du cycle et établissez la puissance nette si le débit massique est de 20 kg/s.

*Solution*

Le cycle est illustré à la figure 4.6. Seuls les états 3 et 4 ont changé. Alors

$$\begin{aligned} \text{État 3} \left\{ \begin{array}{l} P_3 = 4 \text{ MPa} \\ T_3 = 400 \text{ °C} \end{array} \right. & \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} h_3 = 3214,37 \text{ kJ/kg} \\ s_3 = 6,7712 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \\ T_2 = 45,81 \text{ °C} \end{array} \right. \\ \text{État 4} \left\{ \begin{array}{l} P_4 = 10 \text{ kPa} \\ s_4 = s_3 = 6,7712 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K} \end{array} \right. & \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} h_4 = 2144,46 \text{ kJ/kg} \\ x_4 = 0,8163 \end{array} \right. \end{aligned}$$

	ÉTAT 1	ÉTAT 2	ÉTAT 3	ÉTAT 4
P	10 kPa	4 MPa	4 MPa	10 kPa
T	45,81 °C	45,81 °C	400 °C	45,81 °C
s	0,6492	0,6492	6,7712	6,7712
x	0	NA	NA	0,8163
h	191,81	191,81	3214,37	2144,46

<sup>4\*</sup> Les quantités servant à caractériser l'état, apparaissent en surbrillance

$$\begin{aligned} \text{Travaux :} \quad & \dot{w}_p = \dot{w}_1 \quad \dot{w}_1 = 4,33 \text{ kJ/kg} \\ & \dot{w}_t = \dot{w}_3 \quad \dot{w}_3 = 1060,91 \text{ kJ/kg} \\ & \dot{w}_{\text{net}} = \dot{w}_t + \dot{w}_p = 1065,88 \text{ kJ/kg} \\ & \dot{W}_{\text{net}} = \dot{m} \dot{w}_{\text{net}} = 21318 \text{ kW} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Chaleurs} \quad & \dot{q}_H = \dot{q}_{2-3} = h_3 - h_2 = 3018,53 \text{ kJ/kg} \\ & \dot{q}_E = \dot{q}_{4-1} = h_4 - h_1 = 1952,65 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

$$\text{Rendement thermique} \quad \eta_{\text{th}} = \frac{\dot{W}_{\text{net}}}{\dot{q}_H} = 0,353$$

$$\text{ou, alternativement} \quad \eta_{\text{th}} = 1 - \frac{\dot{q}_E}{\dot{q}_H} = 0,353$$

Notons que le titre s'est élevé bien qu'il n'ait atteint pas encore 90%. Un résultat bienvenu de la modification réside aussi dans l'amélioration du rendement. Ce résultat peut surprendre *a priori* puisque le changement introduit beaucoup d'irréversibilité dans le cycle. En effet, la chaudière (évaporateur) doit être minimalement à 400 °C si on veut chauffer l'eau à cette température. Le chauffage se fait donc en présence d'un gradient de température important. Ce fait est toutefois compensé par l'augmentation de l'écart entre les haute et basse températures résultant en une augmentation globale du rendement.

### 4.3 Le cycle de Rankine à resurchauffe

Une façon de diminuer la teneur en humidité lors de la détente et d'obtenir un meilleur rendement est de réchauffer la substance à nouveau par un deuxième passage dans l'évaporateur suite à une première détente dans une turbine à haute pression (H.P.). La matière est ensuite acheminée vers une deuxième turbine à basse pression (B.P.) pour compléter la détente jusqu'à la pression du condenseur. Considérez les figures 4.7 et 4.8 à cet effet.

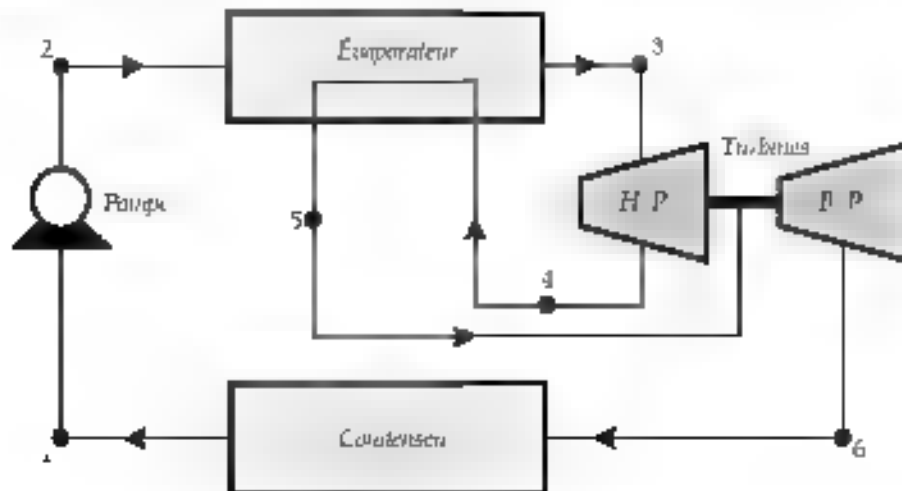


Figure 4.7 Schéma de la machine fonctionnant selon un cycle à resurchauffe

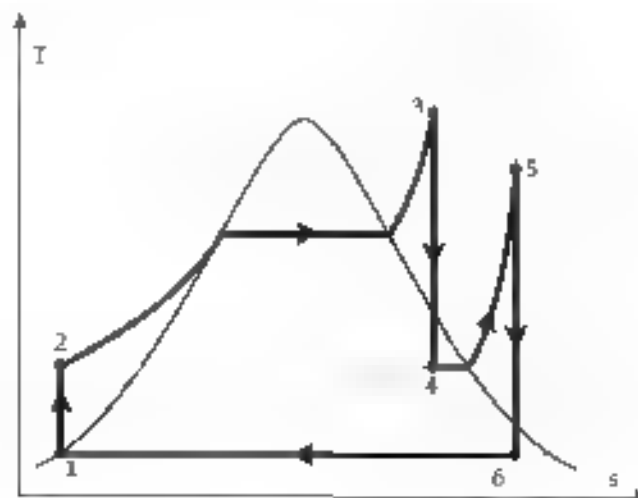


Figure 4.8 Cycle de Rankine avec resurchauffe

Notons que si le chauffage pouvait se poursuivre jusqu'à un point 3 situé à la verticale du point 6 de la figure 4.8, l'étape de resurchauffe ne serait plus requise pour atteindre un titre satisfaisant à l'entrée du condenseur. Toutefois, en raison de considérations métallurgiques, les températures maximales doivent demeurer sous un certain seuil.

**Exemple 4.3** Considérons un cycle à resurchauffe fonctionnant avec de la vapeur d'eau comme fluide moteur. La vapeur sort de la chaudière et entre dans la turbine haute pression à 4 MPa et 400 °C. Après une détente jusqu'à 400 kPa, la vapeur est resurchauffée jusqu'à 400 °C puis détendue jusqu'à 10 kPa, dans la turbine à basse pression. Déterminez le rendement du cycle.

*Solution*

Le schéma de ce cycle correspond à celui de la figure 4.4. Résumons les caractéristiques du fluide en chaque point du cycle dans un tableau.

	ÉTAT 1	ÉTAT 2	ÉTAT 3	ÉTAT 4	ÉTAT 5	ÉTAT 6
$P$	10 kPa	4 MPa	4 MPa	400 kPa	400 kPa	10 kPa
$T$	45,81 °C	45,81 °C	400 °C	45,6 °C	400 °C	45,8 °C
$s$	0,6492	0,6492	6,7712	6,7712	7,3901	7,3901
$x$	NA	NA	NA	0,9757	NA	0,9008
$h$	191,81	193,84	3214,37	2686,29	3273,86	2504,53

\*\* Les quantités servant à caractériser l'état, apparaissent en surbrillance.

*Turbines :*

*i) haute pression*

$$w_{T_1} = h_3 - h_4 = 528,1 \text{ kJ/kg}$$

*ii) basse pression*

$$w_{T_2} = h_5 - h_6 = 769,3 \text{ kJ/kg}$$

*Pompe :*

$$w_p = h_1 - h_2 = -4,0 \text{ kJ/kg}$$

*Trouvée net*

$$w_{\text{net}} = w_{T_1} + w_{T_2} + w_p = 1293,4 \text{ kJ/kg}$$

*Chaudière :*

*i) 1<sup>er</sup> passage*

$$q_{2-3} = h_3 - h_2 = 3018,5 \text{ kJ/kg}$$

*ii) 2<sup>e</sup> passage*

$$q_{4-5} = h_5 - h_4 = 587,6 \text{ kJ/kg}$$

$$q_H = q_{2-3} + q_{4-5} = 3606,1 \text{ kJ/kg}$$

$$q_R = q_{h_1} = h_1 - h_n = 2312,1 \text{ kJ/kg}$$

*Rendement*

$$\eta = \frac{w_{\text{net}}}{q_H} = 1 - \frac{q_R}{q_H} = 0,359$$

#### 4.4 Le cycle à régénération

Le cycle à régénération constitue une modification importante du cycle de Rankine. Le propos est de réchauffer une partie du système en la mettant en contact avec une autre partie à une température plus élevée économisant de ce fait l'énergie totale nécessaire à son fonctionnement. Cette intervention nécessite l'emploi d'un ou de plusieurs réchauffeurs à mélange. Le réchauffeur à mélange est un réservoir isolé thermiquement de l'extérieur où sont mélangés de la vapeur extraite d'une turbine à du liquide comprimé issu d'une pompe (points 1 et 2 de la figure 4.9 respectivement). Les conditions sont telles qu'à sa sortie le mélange se retrouve à l'état de liquide saturé (point 3 de la figure 4.9). Le processus s'effectue à pression constante, c'est-à-dire  $P_1 = P_2 = P_3$ .

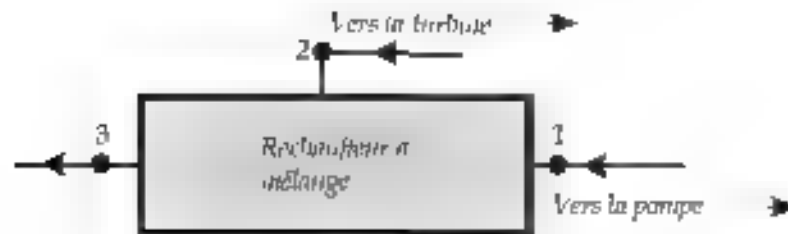


Figure 4.9 Schéma d'un réchauffeur à mélange

L'équation de continuité (2-48) s'écrit alors

$$m_3 = m_1 + m_2 \quad (4-2)$$

Le volume comportant plusieurs entrées et sorties, le premier principe prendra alors la forme spécifiée par l'équation (2-49). Toutefois, puisqu'aucun travail ni chaleur ne sont échangés avec l'environnement, cette équation devient, dans les circonstances

$$\dot{Q} - \dot{W}_{\text{ex}} = 0 = \sum_i m_i h_i - \sum_e m_e h_e$$

c'est-à-dire

$$m_3 h_3 = m_1 h_1 + m_2 h_2 \quad (4-3)$$

Les figures 4.10 et 4.11 montrent le schéma de la machine et le cycle à régénération dans un diagramme  $T-s$ . Comme on peut le constater, une partie du système (la fraction  $\alpha$ ) est extraite après avoir effectué une détente partielle dans la turbine jusqu'à la pression  $P_6$ . Le reste du système (la fraction  $1-\alpha$ ) poursuit sa détente pour être ensuite acheminée vers le condenseur. Puisque les deux portions du système sont à des pressions différentes ( $P_6 < P_3$ ), la fraction  $(1-\alpha)$  est comprimée afin de l'amener à la pression de la substance avec laquelle elle sera mélangée dans le réchauffeur. Après le mélange (état 3), tout le système est amené à la pression de l'évaporateur ( $P_4$ ). Observons qu'à la sortie du condenseur ainsi qu'à la sortie du mélangeur, la matière est à l'état de liquide saturé.

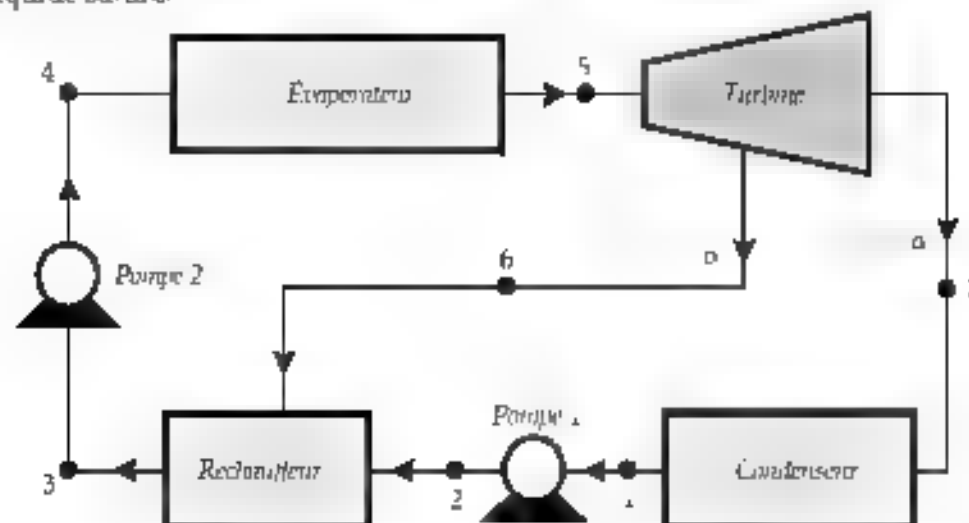


Figure 4.10 Schéma de la machine fonctionnant selon un cycle à régénération



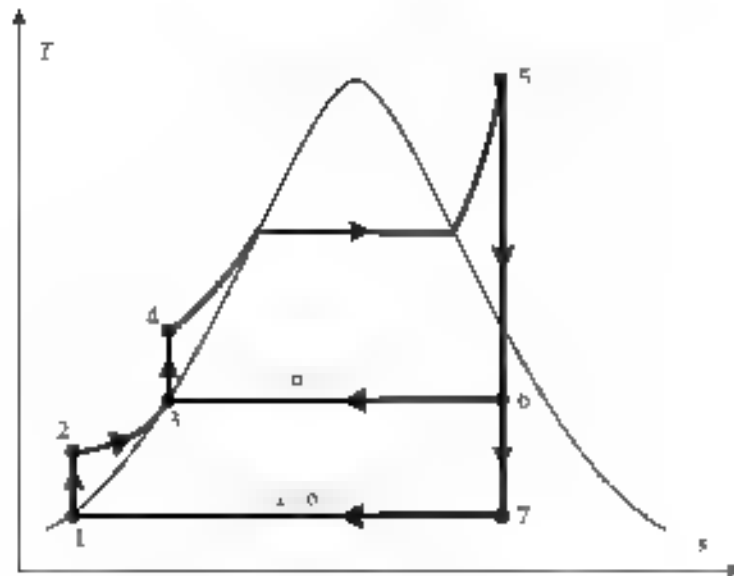


Figure 4.11 Cycle de Rankine à régénération

Définissons  $\alpha$ , la fraction du débit total qui est extraite

$$\alpha = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_3} \quad (4-4)$$

alors

$$1 - \alpha = \frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_3}$$

En écrivant l'équation (4-3) pour le volume de contrôle du réchauffeur de la figure 4.10, il vient

$$\dot{m}_3 h_3 = \dot{m}_2 h_2 + \dot{m}_1 h_1$$

Si on divise de part et d'autre par  $\dot{m}_3$  et se rappelant que  $\dot{m}_3 = \dot{m}_2$  et  $1 - \alpha = \dot{m}_1 / \dot{m}_3$ , on trouve

$$h_3 = \alpha h_2 + (1 - \alpha) h_1$$

et

$$\alpha = \frac{h_3 - h_1}{h_2 - h_1} \quad (4-5)$$

#### Quelques remarques

Puisque les différents éléments de la machine sont parcourus par des débits différents, quel doit-on donner aux concepts de chaleur massique ou de travail massique ? Nous conviendrons d'utiliser le débit total (l'ensemble du système, donc) aux fins de calcul de ces grandeurs. Ainsi, considérant le volume de contrôle de la turbine, l'équation (2-49) s'écrit

$$\dot{W}_T = \dot{m}_5 h_5 - (\dot{m}_6 h_6 + \dot{m}_7 h_7)$$

Divisant de part et d'autre par  $\dot{m}_5$ , on trouve

$$w = h_{t_1} (1/\eta_t + 1) \approx h_t \quad (4-6)$$

où 
$$w_T = \frac{V_{t_1}}{\dot{m}_{t_1}} \quad (4-7)$$

Des considérations de même nature conduisent à

$$u_{p_2} = (1 - \eta_c) h_c \quad (4-8)$$

$$w_{p_1} = h_3 - h_4 \quad (4-9)$$

$$q_H = q_{4-3} = h_3 - h_4 \quad (4-10)$$

$$q_B = q_{1-2} = [(1 - \eta_c) h_c - h_1] \quad (4-11)$$

**Exemple 4.4** Soit un cycle à régénération utilisant de la vapeur d'eau comme fluide moteur tel qu'il est illustré à la figure 4.12. La vapeur sort de la chaudière et entre dans la turbine à 4 MPa et 400 °C. Après une détente jusqu'à 400 kPa, une partie de la vapeur est extraite de la turbine et dirigée vers un réchauffeur à mélange. La pression dans le réchauffeur est de 400 kPa. La vapeur non extraite se détend jusqu'à 10 kPa. Déterminez le rendement de ce cycle.

*Solution*

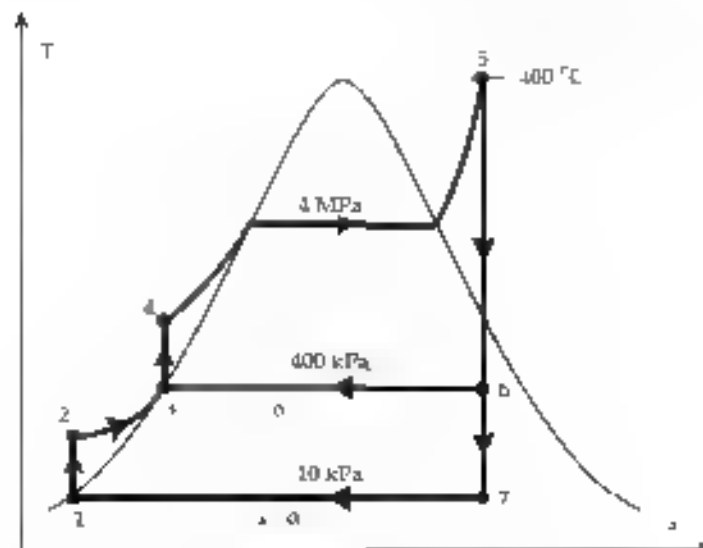


Figure 4.12 Cycle à régénération de l'exemple 4.4

Soit  $f$  la fraction du débit total qui passe par l'état considéré

	ÉTAT 1	ÉTAT 2	ÉTAT 3	ÉTAT 4	ÉTAT 5	ÉTAT 6	ÉTAT 7
$P$	10 kPa	400 kPa	400 kPa	4 MPa	4 MPa	400 kPa	10 kPa
$T$	45,81 °C	45,82 °C	143,03 °C	31,90 °C	400 °C	143,01 °C	45,8 °C
$x$	0,6492	0,6492	0,706	1,7766	0,7712	0,7712	0,7712
$\tau$	0	N.A.	0	N.A.	N.A.	0,9756	0,8113
$h$	191,81	192,2	604,72	608,62	3214,37	2686,29	2144,46
$f$	0,835	0,835	1	1	1	0,165	0,835

\*\* Les quantités servant à caractériser l'état, apparaissent en surbrillance

La fraction du débit total qui est extraite de la turbine est obtenue en appliquant le premier principe au volume de contrôle de la turbine (équation 4-3)) et à l'vier (équation (4-5))

$$1 = \alpha \dot{m}_t + \alpha \dot{m}_p = \dot{m}_3$$

$$\alpha = \frac{\dot{m}_3}{\dot{m}_p} \frac{h_2}{h_1} = 0,165 \quad \text{et} \quad 1 - \alpha = 0,835$$

**Travaux :**

Turbine  $w_T = h_3 - (1 - \alpha) h_2 = 980,3 \text{ kJ/kg}$

Pompes : i)  $w_{p1} = 1 - \alpha (h_1 - h_2) = 0,334 \text{ kJ/kg}$

ii)  $w_{p2} = h_3 - h_4 = 3,9 \text{ kJ/kg}$

Travail net  $w_{net} = w_T - w_{p1} - w_{p2} = 976,1 \text{ kJ/kg}$

**Chaleurs :**

$$q_H = q_{4-5} = h_5 - h_4 = 2605,8 \text{ kJ/kg}$$

$$q_R = (q_{1-2}) = h_2 - h_1 = 1629,7 \text{ kJ/kg}$$

**Rendement**

$$\eta = \frac{w_{net}}{q_H} = 1 - \frac{q_R}{q_H} = 0,375$$

#### 4.5 Cycle de réfrigération à compression de vapeur

Comme nous avons vu au chapitre 3, il est possible de faire transférer de la chaleur d'un corps à basse température vers un corps à température plus élevée en mettant à contribution un cycle de réfrigération. Selon le contexte, l'appareil concerné agira comme réfrigérateur ou comme pompe thermique. Un cycle de Carnot parcouru dans le sens antihoraire dans un diagramme  $T-s$  constitue un cycle de réfrigération idéal et comme précédemment servira de base à partir de laquelle on développera le cycle de réfrigération à compression de vapeur.

Considérons le cycle de réfrigération de Carnot illustré à la figure 4.13. Comme pour la machine thermique, les deux évolutions isothermes (2 à 3 et 4 à 1) sont faciles à réaliser si elles sont effectuées à pression constante dans la région de mélange liquide-vapeur. Toutefois, les évolutions 3-4 et 1-2 ne sont pas reproduites dans la réalité. La compression 1-2 implique la compression d'un mélange liquide-vapeur ce qui est difficilement réalisable comme nous l'avons mentionné, déjà.

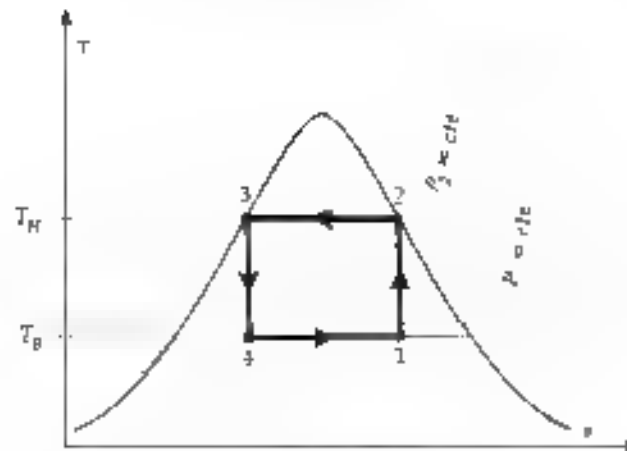


Figure 4.13 Cycle de réfrigération de Carnot

Afin de pouvoir employer un compresseur le point 1 est déplacé vers la droite sur le diagramme et on en fait un état de vapeur saturée. Par ailleurs, l'évolution de détente adiabatique réversible (3-4) est désaturée du point de vue de l'efficacité du cycle mais en termes concrets, elle est coûteuse et le travail qu'elle produit n'est pas très important. La turbine est donc remplacée par une simple soupape de détente. Ce qui résulte comme cycle est illustré à la suite.

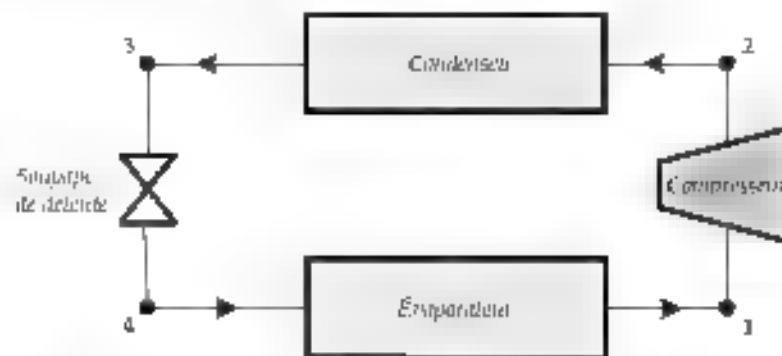


Figure 4.14 Machine fonctionnant selon un cycle de réfrigération à compression de vapeur

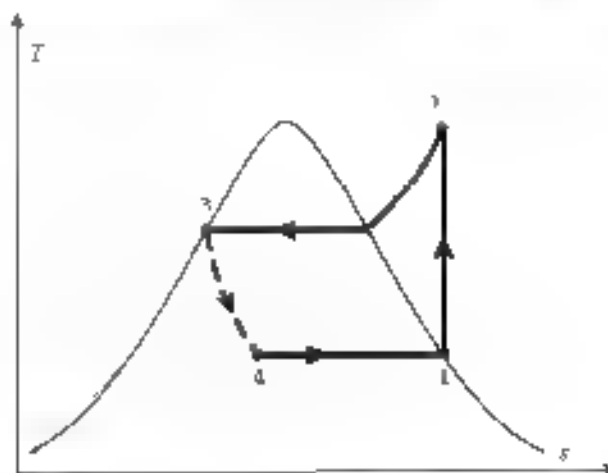


Figure 4.15 Cycle de réfrigération à compression de vapeur

### La soupape de détente

Deux exemples de soupapes de détente sont illustrés à la figure 4.16. Lors du passage à travers la construction, la substance se détend voyant sa pression et sa température chuter.

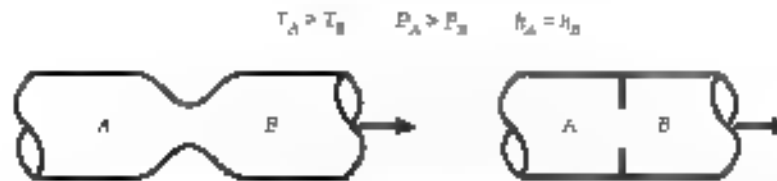


Figure 4.16 Deux exemples de soupapes de détente

Si on écrit le premier principe appliqué au volume de contrôle de la soupape, il vient (équation 4.11),

$$\dot{q} - \dot{w}_L = 0 \quad 0 = \dot{h}_A - \dot{h}_B$$

parce que l'évolution est sans travail et qu'elle est trop rapide pour mettre en échange de chaleur. Il vient donc l'évolution de A à B est *isenthalpique*.

$$h_B = h_A \quad (4.12)$$

La détente dans la soupape est tout à fait irréversible. On ne connaît de l'évolution sinon qu'elle relie les états de départ et de fin. C'est la raison de l'emploi de pointillés à la figure 4.15 entre les états 3 et 4.

**Exemple 4.5.** Un cycle de réfrigération à compression de vapeur utilise du R134a comme réfrigérant et fonctionne entre 140 et 800 kPa avec un débit massique de 0,05 kg/s. Calculez

- les taux de chaleur échangés dans l'évaporateur et le condenseur
- la puissance du compresseur
- les coefficients de performance du cycle

**Solution**

$$\text{État 1} \begin{cases} P = 140 \text{ kPa} \\ v_1 = 1 \end{cases} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} h_1 = 387,3 \text{ kJ/kg} \\ s_1 = 1,7402 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \end{cases}$$

$$\text{État 2} \begin{cases} P = 800 \text{ kPa} \\ s_2 = s_1 = 1,7402 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \end{cases} \quad \text{alors} \quad h_2 = 423,5 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{État 3} \begin{cases} P_3 = 800 \text{ kPa} \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad \text{alors} \quad h_3 = 243,65 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{État 4} \begin{cases} P_4 = 140 \text{ kPa} \\ h_4 = h_3 = 243,65 \text{ kJ/kg} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Travail:} \quad u_c &= h_1 - h_2 = 36,2 \text{ kJ/kg} \\ W &= 1,81 \text{ kW} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Châuffer:} \quad u) \quad q_F &= h_1 - h_4 = 143,67 \text{ kJ/kg} \\ \dot{Q}_B &= 7,18 \text{ kW} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u) \quad q_H &= h_3 - h_2 = 179,87 \text{ kJ/kg} \\ \dot{Q}_F &= 8,99 \text{ kW} \end{aligned}$$

Coefficients de performance

$$\text{pour le réfrigérateur} \quad \beta = \frac{\dot{Q}_B}{W_c} = \frac{7,18}{1,81} = 3,97$$

$$\text{pour la pompe thermique} \quad \beta = \frac{\dot{Q}_H}{|W_c|} = \frac{8,99}{1,81} = 4,97$$

On vérifie que le premier principe est respecté. En effet,

$$\dot{Q}_B - \dot{Q}_H = W_c$$

#### 4.5.1 Choix du réfrigérant

Afin que les transferts de chaleur dans l'évaporateur et le condenseur se fassent à l'intérieur d'un intervalle de temps raisonnable, un écart de température minimal doit être maintenu entre les réservoirs thermiques et le réfrigérant. De façon concrète, on cherche à établir une différence de 10 °C entre ceux-ci. Ainsi si le corps froid (l'intérieur d'un congélateur par exemple) doit être maintenu à -10 °C, on fera en sorte que la température du réfrigérant dans l'évaporateur se situe au tour de -20 °C. Par ailleurs, c'est lors de son passage dans le condenseur que le réfrigérant atteint sa pression la plus faible. Pour éviter une contamination du système par l'air environnant, on s'assure que cette pression dépasse la pression atmosphérique (à l'exemple que nous venons de faire, celle-ci vaut 140 kPa).

D'autres considérations sur lesquelles nous n'élaborerons pas interviennent dans le choix de la substance. A titre d'exemples, la chaleur de vaporisation  $h_{fg}$ , la conductivité thermique de la substance et, bien entendu, son coût, sa disponibilité et sa dangerosité. Plusieurs substances ont été utilisées comme réfrigérant. Le premier réfrigérant conçu autour de 1860, faisant usage d'ammoniac dissous dans de l'eau, cycle à absorption de gaz. L'ammoniac présente des caractéristiques thermodynamiques qui le rendent particulièrement attrayant pour ce type d'usage mais il est toxique, toutefois. Il est toujours employé aujourd'hui pour la réfrigération et climatisation industrielles et commerciales. Dans les années 30, on a développé une famille de composés, les chlorofluorocarbures ou CFC dont un représentant, le fréon 12, a été beaucoup utilisé pour tous les usages domestiques : réfrigération et climatisation domestiques, automobiles, etc. Au milieu des années 70, on a conclu que l'emploi de ces composés vidait l'atmosphère de son ozone. Le protocole de Montréal, signé en 1987 et entré en vigueur en 1989, prévoyait le retrait à terme de tous ces composés, ainsi que plusieurs autres, pour être remplacés

par d'autres mon délétères pour la couche d'ozone. Le choix s'est porté, en bonne partie sur les hydrofluorocarbures (HFC) et en particulier sur le HFC 134a ou R134a.

Le cycle décrit à l'exemple 4.5 peut être effectué par les trois substances mentionnées plus haut : l'ammoniac, le Fréon 12 ainsi que le R134a. Voyons comment les cycles se comparent :

	Fréon 12	Fréon 134 a	Ammoniaque
$T_h$	24,9 °C	18,9 °C	26,1 °C
$T_c$	24,9 °C	18,9 °C	26,1 °C
$T_e$	40,5 °C	39,0 °C	35,3 °C
$T_s$	32,7 °C	31,3 °C	11,8 °C
$\beta$	3,59	3,97	4,57

On remarque que l'ammoniac présente des caractéristiques très intéressantes. En effet la température dans le condenseur peut être particulièrement basse. Et malgré le grand écart entre les températures minimale et maximale ( 26 °C et 35,3 °C respectivement), c'est aussi le cycle qui présente le plus grand coefficient de performance.

#### 4.6 Écart entre les cycles réels et les cycles idéaux

Les cycles décrits plus hauts sont idéaux en ce sens que chacune des composantes est présumée fonctionner de façon idéale. On comprendra qu'un ensemble de facteurs feront en sorte que les cycles effectivement observés s'écarteront de façon appréciable dans certains cas, de leurs pendants idéaux. Parmi les facteurs en question, mentionnons les pertes dans la tuyauterie dues au frottement visqueux et à la chaleur cédée à l'environnement. Ces pertes entraîneront une chute de pression et de température entre l'entrée et la sortie de la conduite. Par ailleurs, les écoulements à travers la turbine et la pompe ne se font pas sans échange de chaleur (ce qui entraîne des pertes relativement mineures) et sont irréversibles. Considérons ce dernier fait, plus avant.

##### 4.6.1 Rendement adiabatique des turbines et des pompes

L'évolution idéale lors du passage dans une turbine est isentropique. L'irréversibilité inhérente à l'écoulement conduira à une augmentation de l'entropie. Il en va de même en ce qui a trait au passage dans la pompe. La figure 4.17 illustre ce dont nous parlons. Les points 2<sub>i</sub> et 4<sub>i</sub> correspondent aux états qui surviendraient des évolutions idéales dans la pompe et la turbine, respectivement, alors que les points 2<sub>r</sub> et 4<sub>r</sub> correspondent aux points à la sortie de chacune de ces composantes qui sont obtenus dans les faits.

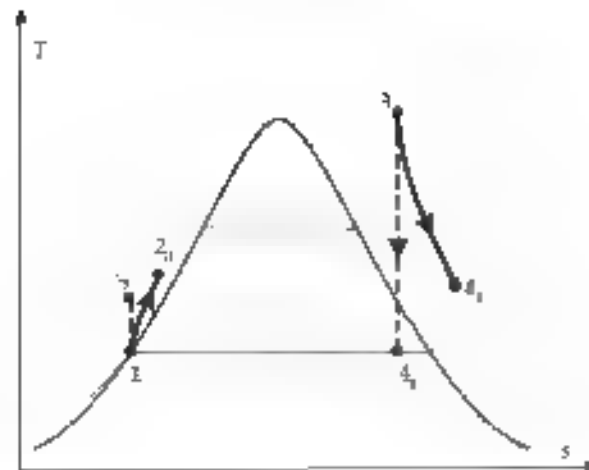


Figure 4.17 Compression et détente adiabatiques idéales et réelles dans un diagramme  $T-s$

### Turbines

Le rendement d'une turbine est défini comme le rapport du travail produit par la turbine,  $w_a$ , et du travail qui serait produit par une turbine idéale opérant entre les mêmes pressions,  $w_i$ .

$$\eta_T = \frac{w_a}{w_i} \quad (4-13)$$

Or le travail se calcule par  $w = h_{\text{entrée}} - h_{\text{sortie}}$

$$\text{Alors :} \quad \eta_T = \frac{h_2 - h_{4a}}{h_2 - h_{4r}} \quad (4-14)$$

Les grandes turbines présentent typiquement des rendements adiabatiques supérieurs à 90 %

### Pompes

Le rendement d'une pompe est défini de façon analogue au rendement adiabatique d'une turbine mais puisque la pompe réelle devra fournir un travail plus important que la pompe idéale, l'équation (4-13) est modifiée en conséquence.

$$\eta_P = \frac{w_i}{w_a} = \frac{h_2 - h_{2s}}{h_2 - h_{2a}} \quad (4-15)$$



**Exemple 4.6** Supposons que la turbine et la pompe du cycle de Rankine décrit à l'exemple 4.2 présentent toutes deux un rendement adiabatique de 90 %. Calculez le nouveau rendement du cycle, ainsi que l'augmentation d'entropie massique dans la turbine et dans la pompe.

*Solution*

**NB** Les travaux de la turbine idéale et de la pompe idéale ont été calculés à l'exemple 4.2

$$\begin{aligned} \text{Turbine :} \quad w_{2s} &= \eta_T w_{Ts} = 0,9 * 1069,91 = 962,92 \text{ kJ/kg} \\ u_3 \quad h_{3s} &= 962,92 \text{ kJ/kg} \Rightarrow h_{3s} = 2251,45 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

$$\text{État 4}_s \left\{ \begin{array}{l} P_{4s} = 10 \text{ kPa} \\ h_{4s} = 2251,45 \text{ kJ/kg} \end{array} \right. \Rightarrow s_{4s} = 7,1066 \text{ kJ/kg K}$$

liquide vapeur

$$\Delta s = s_{4s} - s_3 = 0,335 \text{ kJ/kg K} > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Pompe} \quad w_{r1} &= \frac{w_{P2}}{\eta_P} = \frac{4,03}{0,9} = 4,48 \text{ kJ/kg} \\ u_1 \quad h_{1s} &= 4,48 \text{ kJ/kg} \Rightarrow h_{1s} = 196,29 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

$$\text{État 2}_s \left\{ \begin{array}{l} P_{2s} = 4 \text{ MPa} \\ h_{2s} = 2251,45 \text{ kJ/kg} \end{array} \right. \Rightarrow s_{2s} = 0,6506 \text{ kJ/kg K}$$

liquide comprimé

$$\Delta s = s_{2s} - s_1 = 0,0014 \text{ kJ/kg K} > 0$$

$$\text{Chaleur :} \quad q_H = q_{2-3s} = h_3 - h_{2s} = 3018,08 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{Travail net} \quad w_{\text{net}} = w_{2s} + w_{Pr} = 958,89 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{Rendement} \quad \eta_w = \frac{w_{\text{net}}}{q_H} = 0,318$$

Remarquons le rendement du cycle a été diminué 3,5% du fait de l'irréversibilité lors des passages dans la pompe et, surtout, dans la turbine.

## 4.7 Cycles de puissance à gaz et moteurs à combustion interne

Souvent la substance qui effectue le cycle producteur de travail (le fluide moteur) reste à l'état gazeux pendant tout le cycle. Dans certains cas le système garde son identité tout le temps du fonctionnement de l'appareil : ce sont les mêmes kilogrammes d'air, par exemple, qui parcourent à chaque fois le cycle thermodynamique. Certains auteurs parlent dans ce cas de *cycle fermé*. À l'opposé, certains appareils changent de système pour chaque parcours du cycle. Le fonctionnement de l'appareil comporte alors une phase d'*admission* et une phase d'*échappement*. C'est en particulier le cas des moteurs à *combustion interne* et on utilisera le terme de *cycle ouvert* dans cette situation.

Les moteurs à combustion externe et interne se distinguent par la façon dont la chaleur est produite et communiquée au système. Dans le cas des moteurs à combustion externe, la chaleur provient d'une source extérieure au système et lui est transmise par le biais d'échangeurs de chaleur, par exemple. Cette source de chaleur peut être géothermique, une chaudière au sein laquelle on brûle du carburant ou du bois, un réacteur nucléaire, etc. Les moteurs à combustion interne sont caractérisés par un apport de chaleur provenant d'un carburant ajouté au système, carburant qui en se consommant fournit l'énergie. Comme ce carburant doit être ajouté à chaque cycle thermodynamique, cela implique qu'il soit incorporé au système à un certain moment de chaque cycle effectué par la machine. L'air qui joue souvent dans ce cas le rôle de système, se trouve alors contaminé de produits de combustion et doit aussi être évacué (échappement) pour être remplacé au début du cycle thermodynamique suivant, «admission», voici un exemple de cycle ouvert.

### 4.7.1 Quelques éléments sur les moteurs à combustion interne

Le moteur d'une voiture ou le moteur à hélice d'un avion convertit le mouvement de va-et-vient d'un piston en un mouvement rotatif du vilebrequin par l'intermédiaire de la bielle : ce type de moteur est désigné sous le vocable de *moteur à mouvement alternatif*. La figure qui suit représente de façon schématique les éléments principaux du moteur à quatre temps à allumage commandé.

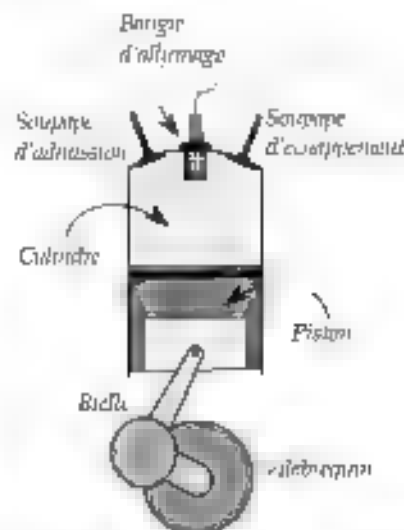


Figure 4.18 Éléments d'un moteur à quatre temps à allumage commandé

### Quelques définitions

Le point le plus haut atteint par le piston dans sa course est dénommé *point mort haut* (PMH) et le volume alors délimité dans le cylindre correspond à sa valeur minimale  $V_{PMH}$ . De façon analogue, le point le plus bas est appelé *point mort bas* (PMB) délimitant le volume  $V_{PMB}$ . La *cylindrée* correspond à la différence de ces deux volumes et la *course* à la distance parcourue par le piston entre le PMB et le PMH. On définit aussi le rapport de compression  $r$

$$r = \frac{V_{PMB}}{V_{PMH}} \quad (4.16)$$

### Les quatre temps du moteur à quatre temps

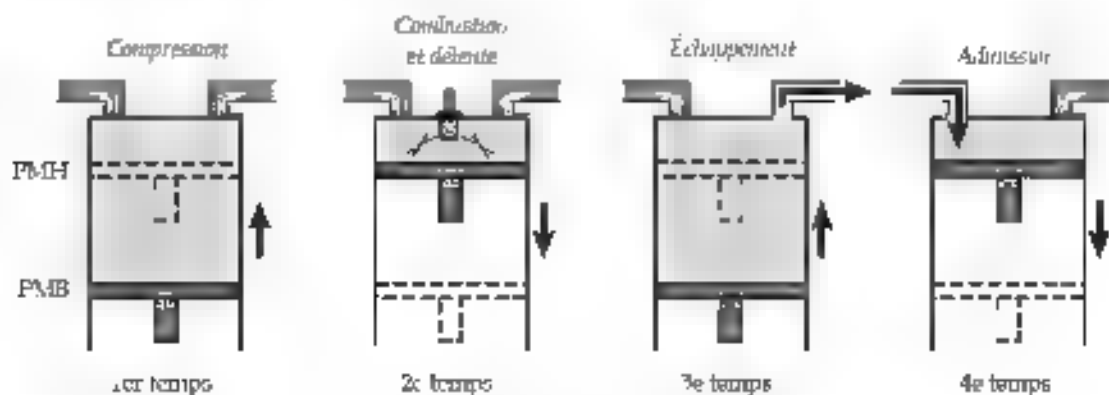


Figure 4.19 Moteur à quatre temps

La figure 4.19 illustre le cycle mécanique d'un piston dans un moteur à quatre temps à allumage commandé. Au début du premier temps, le piston est au PMB et le volume est occupé par le mélange air-essence. Juste avant que le piston n'atteigne le PMH, la bougie d'allumage produit une étincelle qui enflamme le carburant (l'essence) et produit une explosion qui repousse le piston vers le PMB, c'est le deuxième temps. Au cours du troisième temps, la soupape d'échappement étant ouverte, le piston revient vers le PMH pour expulser les produits de combustion vers l'extérieur. Lorsque que le piston atteint le PMH, c'est la soupape d'admission qui s'ouvre afin de permettre au mélange air-essence d'être aspiré dans le cylindre lors du déplacement du piston vers le PMB, c'est la phase d'admission.

Deux éléments méritent d'être signalés à ce stade. Le cycle mécanique du piston correspond à deux va-et-vient de celui-ci ou exprimé autrement à deux rotations du vilebrequin. De ce fait le nombre de tours par minute (TPM ou RPM) que l'on voit affiché sur le tableau de bord spécifie le *double* de cycles par minute effectués par le piston. Autre élément pertinent à mentionner est le fait que du travail n'est produit que durant un seul des quatre temps : la phase de détente (le deuxième temps de la figure 4.19). C'est une raison pour laquelle les moteurs que l'on rencontre comportent plusieurs cylindres fonctionnant de concert. À titre d'exemple, dans un moteur comportant quatre cylindres, chaque cylindre se retrouve dans une phase différente du cycle mécanique. En plus de d'étaler de façon plus régulière la production de travail, cette façon de faire présente l'avantage de requérir des pistons et des cylindres moins volumineux et une vitesse du piston moins grande que dans le cas d'un moteur à un seul piston produisant la même puissance.

La figure 4.20 illustre un diagramme  $P-V$  représentatif d'un moteur à quatre temps.

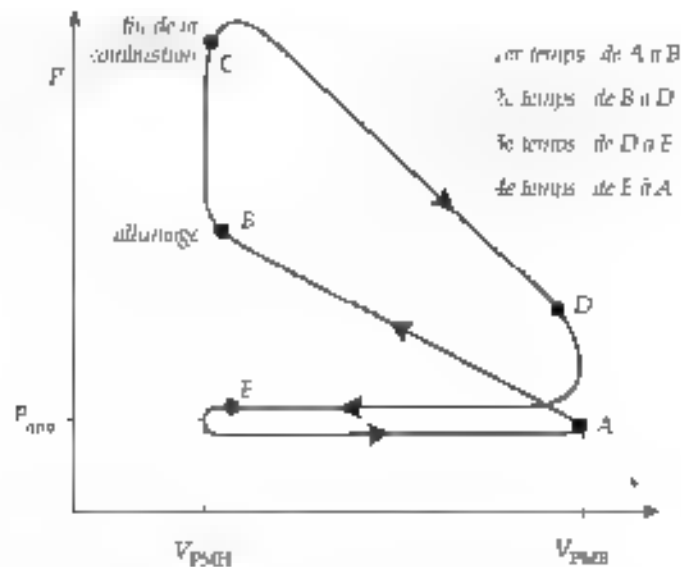


Figure 4.20 Diagramme  $P-V$  d'un moteur à quatre temps

Observons que puisque la combustion est très rapide (de B à C), le volume ne change pratiquement pas, l'inertie du dispositif contraignant le déplacement du piston. Du point de vue thermodynamique, c'est durant cette période que se fait l'absorption de chaleur alors que c'est lors de la phase de «échappement» que de la chaleur est cédée à l'environnement.

#### 4.7.2 Le cycle d'Otto ou de Beau de Rochas

Le premier moteur à allumage commandé a été conçu, puis réalisé en 1860 par l'inventeur belge (naturalisé français) Étienne Lenoir. Il s'agissait d'un moteur à deux temps employant le gaz de houille comme carburant et Lenoir en équipa en 1861 le premier bateau à vapeur à naviguer la Seine. En 1862, l'ingénieur français Alphonse Beau (connu comme Beau de Rochas) décrit de façon théorique le fonctionnement d'un moteur à quatre temps. Au même moment, allemand Nikolaus Otto découvre lui aussi le principe du moteur à quatre temps et développe un prototype. En 1886, on réalisa que Beau de Rochas avait précédé quelque peu dans le dépôt de son brevet et on invalida celui d'Otto. Malgré ce fait, la littérature présente le plus souvent le cycle thermodynamique qui est le sujet de cette section comme le cycle d'Otto; par souci de conformité, c'est la nomenclature que nous emploierons.

Afin de définir un cycle thermodynamique qui puisse modéliser le comportement d'un moteur, certaines hypothèses doivent être faites. Elles s'appliquent bien sûr aux cycles d'Otto et de Diesel dont nous allons discuter, mais aussi aux autres cycles de puissance à gaz que l'on retrouve dans ailleurs (cycles de Stirling, d'Ericsson, de Brayton, etc.).

Au sens strict, ce n'est pas le "même air" qui effectue tous les cycles. En effet, l'air est évacué avec le carburant consommé lors de la phase d'échappement pour être réintroduit durant la phase d'admission. Ces considérations conditionnent et expliquent les hypothèses 1 et 2 à la suite.

- i) On travaille avec un système au sens que cela a été défini précédemment, c'est-à-dire qu'une masse d'air fixe constitue le système (fluide moteur). Il n'y a donc pas de phases d'admission et d'échappement.
- ii) La combustion et l'échappement sont modélisés comme des échanges de chaleur avec l'environnement.
- iii) Les évolutions sont considérées réversibles.
- iv) Les chaleurs spécifiques  $c_p$  et  $c_v$  sont considérées constantes et on utilise les valeurs qu'elles prennent à 25 °C.

Le cycle d'Otto représenté à la suite (figure 4.21) comporte deux évolutions isochores et deux évolutions isentropiques. Souvent, afin de modéliser les phases d'admission et d'échappement, l'évolution 4-1 (ou 1-4) est ajoutée au diagramme  $P-V$  mais n'est pas considérée pour les fins des calculs.

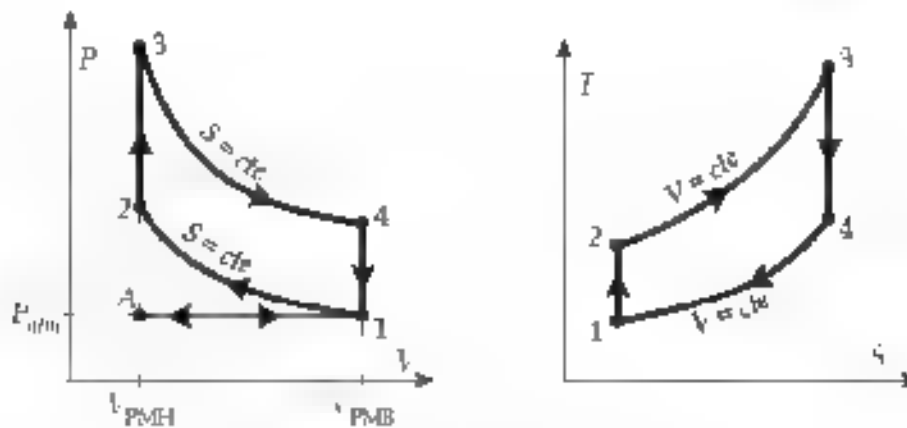


Figure 4.21 Diagrammes  $P-V$  et  $T-S$  du cycle d'Otto

On observe que les évolutions ne correspondent pas tout à fait aux quatre temps du moteur que nous avons décrits plus haut. Le temps de compression du mélange air-essence (temps 1) est représenté par l'évolution isentropique 1-2. Toutefois, le 2<sup>e</sup> temps est modélisé par deux évolutions. L'évolution isochore 2-3 représente la portion de la combustion du 2<sup>e</sup> temps et l'évolution isentropique 3-4, sa portion de détente. Alors qu'en réalité dans le moteur le rejet de chaleur vers l'extérieur se fait en expulsant les produits de combustion (échappement), dans le cycle d'Otto il se fait lors de l'évolution isochore 4-1.

Le rapport de compression défini à l'équation (4-16) devient ici :

$$r = \frac{V_{PMB}}{V_{PMH}} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_4}{V_3} \quad (4-17)$$

Considérons les différentes évolutions

- i. évolution 1-2 :  $S = cste$  alors,  $Q_{1-2} = 0$  et  $PV^\gamma = cste$   

$$W_{1-2} = mR \frac{T_2 - T_1}{1 - \gamma}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = r^{\gamma-1} \quad (4-18)$$

ii) évolution 2-3:  $V = \text{cte}$  alors  $W_{2,3} = 0$   
 $Q_{2,3} = mC_v (T_3 - T_2) = Q_H$  (4-19)

iii) évolution 3-4:  $S = \text{cte}$  alors,  $Q_{3,4} = 0$  et  $PV^\gamma = \text{cte}$   
 $W_{3,4} = mR \frac{T_4 - T_3}{\gamma - 1}$   
 $\frac{T_4}{T_3} = \left( \frac{V_4}{V_3} \right)^{\gamma-1} = r^{\gamma-1}$  (4-20)

iv) évolution 4-1:  $V = \text{cte}$  alors  $W_{4,1} = 0$   
 $Q_{4,1} = mC_v (T_1 - T_4) = -Q_F$  (4-21)

*Calcul du rendement thermique*

En comparant les équations (4-18) et (4-20), on observe qu'on peut écrire:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_4}{T_3}$$

et donc;

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} \quad (4-22)$$

Par ailleurs, le rendement thermique s'écrit

$$\eta = 1 - \frac{Q_F}{Q_H} = 1 - \frac{mC_v (T_4 - T_1)}{mC_v (T_3 - T_2)}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \left( \frac{T_3/T_2 - 1}{T_4/T_1 - 1} \right)$$

du fait du résultat (4-22) ainsi que de (4-18), il vient

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - r^{1-\gamma} \quad (4-23)$$

On constate un résultat assez surprenant: le rendement de ce cycle ne dépend que du rapport de compression  $r$ . Les températures minimale et maximale n'interviennent pas dans le résultat, ce qui est assez inusité. Elles affectent la grandeur du travail net

**Exemple 4.8** Un cycle d'Otto idéal a un rapport de compression de 8. Au début de l'évolution de compression, l'air est à 100 kPa et 300 K. La chaleur massique transférée durant l'évolution de chauffage isochore est de 1000 kJ/kg.

- a) Calculez les températures et pression pour chaque état.  
 a) Calculez les travaux et chaleurs massiques et vérifiez que le rendement correspond bien au résultat (4-23)

*Solution*

Ce cycle est représenté à la figure 4.21 avec

$$P_1 = 100 \text{ kPa} ; T_1 = 300 \text{ K} ; r = \frac{V_1}{V_2} = 8 \quad q_{2,3} = 1000 \text{ kJ/kg et}$$

$$R = 0,287 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} ; C_v = 0,7165 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} \quad k = 1,4$$

a) 1-2: Compression isentropique  $P_1 V_1^k = P_2 V_2^k$

$$q_{1,2} = 0$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{k-1} = \left( \frac{1}{8} \right)^{0,4} \Rightarrow T_2 = 689,2 \text{ K}$$

$$P_2 = P_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^k = P_1 r^k \Rightarrow P_2 = 1,836 \text{ MPa}$$

$$w_{1,2} = \frac{R}{1-k} (T_2 - T_1) = -270,3 \text{ kJ/kg}$$

2-3: Chauffage isochore

$$w_{2,3} = 0$$

$$q_{2,3} = C_v (T_3 - T_2) = 1000 \text{ kJ/kg} \Rightarrow T_3 = 2084,9 \text{ K}$$

$$\frac{P_3 V_3}{T_3} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow P_3 = P_2 \frac{T_3}{T_2} = 5,560 \text{ MPa}$$

3-4: Détente isentropique  $P_3 V_3^k = P_4 V_4^k$

$$q_{3,4} = 0$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left( \frac{V_3}{V_4} \right)^{k-1} = r^{0,4} \Rightarrow T_4 = 907,5 \text{ K}$$

$$\frac{P_4 V_4}{T_4} = \frac{P_3 V_3}{T_3} \Rightarrow P_4 = P_3 \frac{T_4}{T_3} = 302,5 \text{ kPa}$$

$$w_{3,4} = \frac{R}{1-k} (T_4 - T_3) = 844,8 \text{ kJ/kg}$$

4-1: Refroidissement isochore

$$w_{4,1} = 0$$

$$q_{4,1} = C_v (T_1 - T_4) = -435,3 \text{ kJ/kg}$$

b) *Travail net*  $w_{\text{net}} = w_{1-2} + u_{2-3} = 565,5 \text{ kJ/kg}$

*Rendement*  $q_H = q_{2-3} = 1000 \text{ kJ/kg}$   
 $q_B = |q_{4-1}| = 435,3 \text{ kJ/kg}$

$$\eta = \frac{w_{\text{net}}}{q_H} = 1 - \frac{q_B}{q_H} = 0,565$$

On vérifie qu'on retrouve le même résultat à l'aide de 4.23, en effet:

$$\eta = 1 - r^{1-\gamma} = 1 - 8^{-0,4} = 0,565$$

Comme il a été mentionné plus haut, le rendement de ce cycle est déterminé par le rapport de compression. La figure qui suit illustre ce fait.

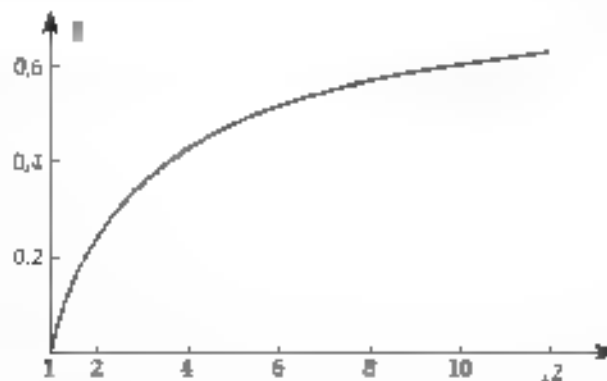


Figure 4.22 Rendement thermique du cycle d'Otto avec de l'air pour système

On a évidemment cherché à hausser ce rapport autant que faire se peut mais on se bute à une difficulté incontournable : *l'auto-allumage* ou *allumage spontané*. Au-delà d'une certaine température quand le piston s'approche du PMH, le mélange s'entame spontanément sans que la bougie n'ait à intervenir. Cet allumage incontrôlé endommage le moteur et doit être empêché. Une façon de contourner la difficulté a été de hausser l'indice d'octane de l'essence employée. Malgré cela, ainsi que le ajout d'injecteurs dont nous discuterons plus avant, il est rare que l'on rencontre des rapports de compression au-delà de 10 à 12 pour les moteurs à allumage commandé.

### 4.7.3 Cycle de Diesel

Une façon de contourner le problème de combustion incontrôlée tout en travaillant avec un rapport de compression élevé, est d'ajouter le carburant au moment que l'on veut que la combustion s'effectue. Si la température au moment d'atteindre le PMH est assez élevée, le carburant s'enflammera spontanément, rendant ainsi inutile l'intervention de la bougie. Rudolf Diesel développa en 1897 le premier prototype du moteur qui porte désormais son nom. Ainsi la bougie d'allumage est remplacée par un injecteur qui ajoute le carburant au moment voulu, c'est-



à-dire quand le piston atteint le PMH. Du point de vue thermodynamique, le cycle de Diesel peut être envisagé comme une modification du cycle d'Otto où l'absorption de chaleur se faisant à volume constant est remplacée par une évolution à pression constante. La figure 4.23 illustre cette idée

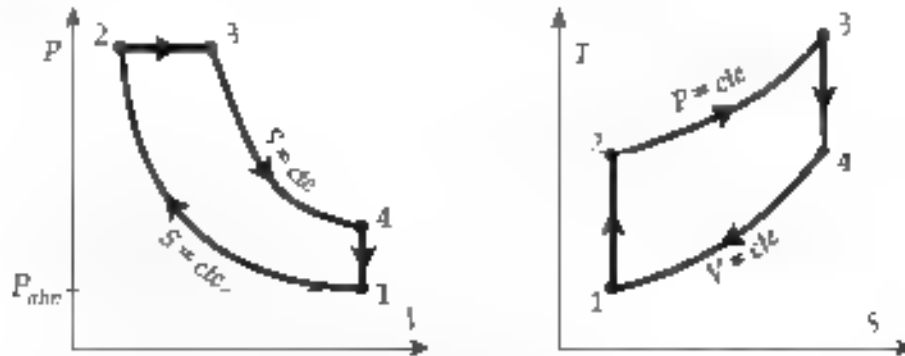


Figure 4.23 Diagrammes P-V et T-S du cycle de Diesel

Comme la figure 4.23, le montre le cycle comporte deux évolutions isentropiques (1-2 et 3-4) et une évolution isobare au cours de laquelle  $Q_H$  est absorbée (2-3) et finalement, une évolution isochore durant laquelle  $Q_R$  est rejetée (4-1). Notons qu'ici, le rapport de compression se définit par

$$r = \frac{V_{PMH}}{V_{PMR}} = \frac{V_1}{V_2} \quad (\text{puisque } V_3 = V_2) \quad (4-24)$$

On juge utile de définir  $r$  le rapport des volumes avant et après la combustion, c'est-à-dire:

$$r_c = \frac{V_2}{V_1} \quad (4-25)$$

Ici, en contraste avec le cycle d'Otto, du travail est produit durant trois des quatre évolutions, voyons cela de façon plus détaillée

i) évolution 1-2:  $S = \text{cte}$  alors,  $Q_{1-2} = 0$  et  $PV^\gamma = \text{cte}$

$$W_{1-2} = mR \cdot \frac{T_2 - T_1}{1 - \gamma}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = r^{(\gamma-1)} \quad (4-26)$$

et

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (4-27)$$

ii) évolution 2-3:  $P = \text{cte}$  alors  $W_{2-3} = P_2(V_3 - V_2) = mR(T_3 - T_2)$

$$Q_{2-3} = mC_p(T_3 - T_2) = Q_H \quad (4-28)$$

iii) évolution 3-4:  $S = \text{cte}$  alors,  $Q_{3-4} = 0$  et  $PV^\gamma = \text{cte}$

$$W_{2-4} = mR \left( \frac{T_4}{1} - \frac{T_3}{k} \right)$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left( \frac{P_2}{P_3} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (4-29)$$

iv) évolution 4-1:  $V = \text{cte}$  alors  $W_{4-1} = 0$

$$Q_{4-1} = mC_v(T_1 - T_4) = -Q_B \quad (4-30)$$

Calcul du rendement thermique

$$\eta = 1 - \frac{Q_B}{Q_A} = 1 - \frac{mC_v(T_4 - T_1)}{mC_p(T_4 - T_2)}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_4}{T_2} \left\| \frac{C_v}{C_p} \right\| \left( \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_1} - 1} \right)$$

$$\eta = 1 - r^{\frac{k-1}{k}} \left\| \frac{1}{k} \right\| \left( \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_1} - 1} \right) \quad (4-31)$$

En écrivant la loi des gaz parfaits dans le cas des évolutions 2-3 et 4-1, il vient

$$\frac{P_3 V_3}{T_3} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_3} = \frac{V_2}{V_3} = r \quad (4-32)$$

$$\frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{P_2}{P} \quad (4-33)$$

En faisant le rapport des équations (4-27) et (4-29), on trouve (puisque  $P_1 = P_2$ ).

$$\frac{T_4}{T_1} \left\| \frac{T_2}{T_3} \right\| = \frac{P_2}{P}$$

Faisant usage de (4-32) et de (4-33),

$$\frac{T_4}{T_1} = r^k \quad (4-34)$$

Finalement, insérant (4-32) et (4-34) dans (4-31), on trouve pour le rendement

$$\eta = 1 - r^{\frac{k-1}{k}} \left\| \frac{r^k}{r^k} \right\| \quad (4-35)$$

**Exemple 4.9** Un cycle de Diesel idéal, a un rapport de compression de 18. Au début de l'évolution de compression, l'air est à 100 kPa et 300 K. La chaleur massique transférée durant l'évolution de chauffage isobare est de 1000 kJ/kg.

- a) Calculez les températures et pression aux différents points de cycle  
 b) Calculez les travaux et chaleurs massiques et vérifiez que le rendement correspond bien au résultat (4-35)

*Solution*

Ce cycle est représenté à la figure 4.23 avec

$$P_1 = 100 \text{ kPa} , T_1 = 300 \text{ K} ; r = \frac{V_1}{V_2} = 18 , q_{2-3} = 1000 \text{ kJ/kg et}$$

$$R = 0,287 \text{ kJ/kg K} ; C_v = 0,7165 \text{ kJ/kg K} \quad k = 1,4$$

a) 1-2: Compression isentropique  $P_1 V_1^k = P_2 V_2^k$

$$q_{1-2} = 0$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{k-1} = \left( \frac{1}{18} \right)^{0,4} \Rightarrow T_2 = 953,3 \text{ K}$$

$$P_2 = P_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^k = P_1 r^k \Rightarrow P_2 = 5,720 \text{ MPa}$$

$$w_{1-2} = \frac{R}{1-k} (T_2 - T_1) = -466,7 \text{ kJ/kg}$$

2-3: Chauffage isobare

$$P_3 = P_2 = 5,720 \text{ MPa}$$

$$w_{2-3} = P (v_3 - v_2) = R (T_3 - T_2) = 286,0 \text{ kJ}$$

$$q_{2-3} = C_p (T_3 - T_2) = 1000 \text{ kJ/kg} \Rightarrow T_3 = 1949,8 \text{ K}$$

$$r = \frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1} = 2,045$$

3-4: Détente isentropique  $P_3 V_3^k = P_4 V_4^k$

$$q_{3-4} = 0$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left( \frac{V_3}{V_4} \right)^{k-1} = r^{0,4} \Rightarrow T_4 = 816,9 \text{ K}$$

$$w_{3-4} = \frac{R}{1-k} (T_4 - T_3) = 812,8 \text{ kJ/kg}$$

4-1: Refroidissement isochore

$$w_{4-1} = 0$$

$$q_{4-1} = C_v (T_1 - T_4) = -370,4 \text{ kJ/kg}$$

b) *Travail net*  $w_{net} = w_{1-2} + w_{2-3} + w_{3-4} = 630,1 \text{ kJ/kg}$

ou, encore:  $q_H = q_{2-3} = 1000 \text{ kJ/kg}$

$q_R = |q_{4-1}| = 370,4 \text{ kJ/kg}$

et  $w_{net} = q_H - q_R$

*Rendement*  $\eta = \frac{w_{net}}{q_H} = 1 - \frac{q_R}{q_H} = 0,630$

On vérifie qu'on retrouve le même résultat à l'aide de (4-35), en effet

$$\eta = 1 - r_c^{-\gamma} \left[ \frac{r_c^{\gamma} - 1}{\gamma(\gamma - 1)} \right] = 1 - 18^{-0,4} \left[ \frac{2,045^{1,4} - 1}{1,4 \cdot 2,045 - 1} \right] = 0,63$$

En comparant cet exemple avec l'exemple 4.8, on observe que pour les mêmes conditions de départ (état 1) et pour le même apport en chaleur le rendement et donc le travail net est plus important. Il est plutôt rare toutefois, qu'on puisse effectuer ce genre de comparaison, les conditions d'opération des deux cycles se démarquant de façon appréciable la plupart du temps. Le moteur Diesel est intéressant en ce que le rapport de compression peut être particulièrement élevé: des valeurs de plus de 20 ne sont pas rares. Par ailleurs, le carburant employé tend à s'enflammer plus facilement que l'essence (qui requiert un processus de raffinage plus élaboré) permettant une combustion plus complète. Les températures et pressions sont souvent très importantes nécessitant de ce fait un moteur dont la construction est plus robuste que pour les moteurs fonctionnant selon le cycle d'Otto. Cette robustesse accrue fait en sorte que les moteurs Diesel sont souvent plus encombrants et plus lourds que leurs pendants fonctionnant selon le cycle d'Otto. Ces derniers équiperont donc typiquement des véhicules relativement légers (motos, voitures, par exemple) alors que les moteurs Diesel seront souvent employés pour les modes de transport plus lourds (bateaux, trains et camions, par exemple). Avec l'apparition des moteurs à injection et l'introduction d'ordinateurs pour contrôler la qualité du mélange air-essence ainsi que l'allumage, la frontière entre les deux designs tend à s'estomper.

## 4.8 EXERCICES

**Problème 1** Soit un cycle de Rankine de base adiabate par l'énergie solaire et utilisant l'eau comme fluide moteur. De la vapeur saturée sort du capteur solaire à  $150^\circ\text{C}$  et la pression au condenseur est de 10 kPa. Calculez le rendement thermique de ce cycle.

Rép.  $\eta = 0,23$

**Problème 2** On désire étudier l'effet de la pression à l'échappement de la turbine sur la performance d'un cycle de Rankine avec surchauffe à vapeur d'eau. La vapeur entre dans la turbine à 3,5 MPa et  $350^\circ\text{C}$ .

- Calculez le rendement thermique du cycle et le titre de l'eau à la sortie de la turbine pour des pressions à l'échappement de 5 kPa, 10 kPa, 50 kPa et 100 kPa.
- Tracez un graphique du rendement thermique en fonction de la pression à l'échappement de la turbine pour la pression et la température d'entrée données.

Rép. i) Pour  $P_4 = 5 \text{ kPa}$  :  $\eta = 0,36$  et  $x_4 = 0,781$   
 ii) Pour  $P_4 = 10 \text{ kPa}$  :  $\eta = 0,34$  et  $x_4 = 0,801$   
 iii) Pour  $P_4 = 50 \text{ kPa}$  :  $\eta = 0,285$  et  $x_4 = 0,856$   
 iv) Pour  $P_4 = 100 \text{ kPa}$  :  $\eta = 0,256$  et  $x_4 = 0,884$

**Problème 3** Soit un cycle à resurchauffe idéal dans lequel la vapeur d'eau entre dans la turbine à haute pression à 3,5 MPa et  $350^\circ\text{C}$  pour s'y détendre jusqu'à 0,8 MPa. On la resurchauffe ensuite jusqu'à  $350^\circ\text{C}$  puis on la détend jusqu'à 10 kPa dans la turbine à basse pression. Calculez le rendement thermique du cycle et le titre de la substance à la sortie de la turbine à basse pression.

Rép.  $\eta = 0,347$   $x_6 = 0,901$

**Problème 4** On désire étudier l'influence du nombre d'étages de resurchauffe dans un cycle à resurchauffe idéal utilisant la vapeur d'eau. Recommencez le problème no 3 en employant deux étages de resurchauffe à  $350^\circ\text{C}$  l'un à 1,2 MPa et l'autre à 0,2 MPa, au lieu de 1 étage unique à 0,8 MPa.

Rép.  $\eta = 0,352$   $x_8 = 0,988$

**Problème 5** On désire étudier l'influence du nombre de réchauffeurs d'eau d'alimentation à mélange sur le rendement thermique d'un cycle idéal où la vapeur d'eau sort du générateur de vapeur à 20 MPa et 600 °C et où la pression au condenseur est de 10 kPa. Calculez le rendement thermique pour chacun des cas suivants :

- il n'y a pas de réchauffeur d'eau d'alimentation ,
- il y a un réchauffeur d'eau d'alimentation fonctionnant à 1,0 MPa
- il y a deux réchauffeurs d'eau : un fonctionnant à 3,0 MPa et l'autre à 0,2 MPa

Rép. : a)  $\eta = 0,438$

b)  $\eta = 0,473$

c)  $\eta = 0,488$

**Problème 6** Soit un cycle combiné idéal à resurchauffe et à régénération utilisant de la vapeur d'eau comme fluide moteur. La vapeur entre dans la turbine à haute pression à 3,5 MPa et 350 °C et une partie en est extraite à 0,8 MPa pour alimenter un réchauffeur d'eau d'alimentation. La vapeur qui reste est resurchauffée à cette pression jusqu'à 350 °C et dirigée vers la turbine à basse pression d'où on en extrait une partie à 0,2 MPa pour alimenter un autre réchauffeur d'eau d'alimentation. La pression au condenseur est de 10 kPa.

Calculez le travail massique net et le rendement thermique du cycle.

Rép.  $w_{\text{net}} = 1021 \text{ kJ/kg}$  ;  $\eta = 0,373$

**Problème 7** Remplacez la valve d'expansion de l'exemple 4.3 par une turbine isentropique.

- Quelle est la puissance développée par la turbine ?
- Quel est le nouveau coefficient de performance du cycle ?

Rép. a)  $W_T = 0,325 \text{ kW}$  b)  $\beta = 5,05$

**Problème 8** On utilise un cycle de réfrigération de Rankine à compression de vapeur avec du R-34 pour climatiser une maison l'été. Le milieu extérieur est à 40 °C et on cherche à maintenir la température intérieure à 20 °C. Si le débit massique, la température du fluide dans l'évaporateur et la pression dans le condenseur sont respectivement de 0,008 kg/s, 8 °C et 1,4 MPa, calculez

- la capacité de réfrigération  $\dot{Q}_B$  du cycle en ton (1 ton = 211 kJ/min)
- le titre du fluide à l'entrée de l'évaporateur
- le coefficient de performance du cycle

Rép. a)  $\dot{Q}_B = 0,288 \text{ ton}$

b)  $x_4 = 0,338$

c)  $\beta = 4,77$

**Problème 9** Un moteur à allumage commandé de 2 l de cylindrée à quatre pistons présente un rapport de compression de 8,5. Après admission (au début de la phase de compression), l'air est à 288 K et 100 kPa. La température maximale atteinte par l'air est de 2300 K.

- Établissez les volumes au PMB et au PMH.
- Établissez les pression et température à chaque point du cycle.
- Calculez le travail net par cycle ainsi que la puissance (théorique) du moteur s'il fonctionne à 3000 RPM.

$$a) V_{PMB} = 5,67 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3, V_{PMH} = 6,67 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$$

$$b) P_1 = 100 \text{ kPa}, T_1 = 288 \text{ K}$$

$$P_2 = 2,00 \text{ MPa}, T_2 = 667,9 \text{ K}$$

$$P_3 = 6,788 \text{ MPa}, T_3 = 2300 \text{ K}$$

$$P_4 = 222,7 \text{ kPa}, T_4 = 668,0 \text{ K}$$

$$c) W_{\text{net}} = 1,833 \text{ kJ}, W'_{\text{net}} = 45,8 \text{ kW}$$

**Problème 10** Un moteur diesel de 2 l de cylindrée à quatre pistons présente un rapport de compression de 22. Après admission (au début de la phase de compression) l'air est à 300 K et 100 kPa. La température maximale atteinte par l'air est de 2300 K.

- Établissez les volumes au PMB et au PMH.
- Établissez les pression et température à chaque point du cycle.
- Calculez le travail net par cycle ainsi que la puissance (théorique) du moteur s'il fonctionne à 3000 RPM.

$$a) V_{PMB} = 5,5 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3, V_{PMH} = 2,5 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3$$

$$b) P_1 = 100 \text{ kPa}, T_1 = 300 \text{ K}$$

$$P_2 = 7,575 \text{ MPa}, T_2 = 1033 \text{ K}$$

$$P_3 = 7,575 \text{ MPa}, T_3 = 2300 \text{ K}$$

$$P_4 = 339,3 \text{ kPa}, T_4 = 977,1 \text{ K}$$

$$c) W_{\text{net}} = 2,775 \text{ kJ}, W'_{\text{net}} = 64,4 \text{ kW}$$







Université du Québec (UQ)

**École de technologie supérieure**

Service des enseignements généraux

Local B2500 - 396-8938

Site internet : <http://www.etsmtl.ca/index/htm>

**ING-160**

**THERMODYNAMIQUE ET MÉCANIQUE  
DES FLUIDES**

**TABLES DE THERMODYNAMIQUE**

**Révisé en mai 2006**



TABLE A.1  
Variables thermodynamiques de la vapeur d'eau<sup>a</sup>

TABLE A.1.1

Vapeur saturée: table de la température

Vapeur saturée: table de la température												
Temp. °C $T$	Pres. kPa $P$	Volume massique $m^3/kg$		Énergie interne kJ/kg			Enthalpie kJ/kg			Entropie kJ/kg·K		
		Liquide sat. $v_f$	Vapeur sat. $v_g$	Liquide sat. $u_f$	Évap. $u_{fg}$	Vapeur sat. $u_g$	Liquide sat. $h_f$	Évap. $h_{fg}$	Vapeur sat. $h_g$	Liquide sat. $s_f$	Évap. $s_{fg}$	Vapeur sat. $s_g$
0.01	0.6113	0.001 000	206.14	.00	2375.3	2375.3	.01	2501.3	2501.4	.0000	9.1562	9.1562
5	0.8721	0.001 000	147.12	20.97	2361.3	2382.3	20.98	2489.6	2510.6	.0761	8.9496	9.0257
10	1.2276	0.001 000	106.38	42.00	2347.2	2389.2	42.01	2477.7	2519.8	1510	8.7498	8.9008
15	1.7051	0.001 001	77.93	62.99	2333.1	2396.1	62.99	2465.9	2528.9	2245	8.5569	8.7814
20	2.339	0.001 002	57.79	83.95	2319.0	2402.9	83.96	2454.1	2538.1	2966	8.3706	8.6677
25	3.169	0.001 003	43.36	104.88	2304.9	2409.8	104.89	2442.3	2547.2	3674	8.1905	8.5580
30	4.246	0.001 004	32.89	125.78	2290.8	2416.6	125.79	2430.5	2556.3	4369	8.0164	8.4533
35	5.628	0.001 006	25.22	146.67	2276.7	2423.4	146.68	2418.6	2565.3	5053	7.8478	8.3531
40	7.384	0.001 008	19.52	167.56	2262.6	2430.1	167.57	2406.7	2574.3	5725	7.6845	8.2570
45	9.593	0.001 010	15.26	188.44	2248.4	2436.8	188.45	2394.8	2583.2	6387	7.5261	8.1648
50	12.349	0.001 012	12.03	209.32	2234.2	2443.5	209.33	2382.7	2592.1	7038	7.3725	8.0763
55	15.758	0.001 015	9.568	230.21	2219.9	2450.1	230.23	2370.7	2600.9	7679	7.2234	7.9913
60	19.940	0.001 017	7.671	251.11	2205.5	2456.6	251.13	2358.5	2609.6	8312	7.0784	7.9096
65	25.03	0.001 020	6.197	272.02	2191.1	2463.1	272.06	2346.2	2618.3	8935	6.9375	7.8310
70	31.19	0.001 023	5.042	292.95	2176.6	2469.6	292.98	2333.8	2626.8	9549	6.8004	7.7553
75	38.58	0.001 026	4.131	313.90	2162.0	2475.9	313.93	2321.4	2635.3	10155	6.6669	7.6824
80	47.39	0.001 029	3.407	334.86	2147.4	2482.2	334.91	2308.8	2643.7	10753	6.5369	7.6122
85	57.83	0.001 033	2.828	355.84	2132.6	2488.4	355.90	2296.0	2651.9	11343	6.4102	7.5445
90	70.14	0.001 036	2.361	376.85	2117.1	2494.5	376.92	2283.2	2660.1	11925	6.2866	7.4791
95	84.55	0.001 040	1.982	397.88	2102.7	2500.6	397.96	2270.2	2668.1	12500	6.1659	7.4159

<sup>a</sup> Adaptation de Joseph H. Keenan, Frederick O. Keyes, Philip G. Hill et Joan G. Moore, *Steam Tables* (New York: John Wiley & Sons Inc., 1978).

TABLE A.1.1 (suite)  
Vapeur saturée: table de la température

Temp. °C $T$	Pres. MPa $P$	Volume massique $m^3/kg$		Énergie interne $kJ/kg$		Enthalpie $kJ/kg$		Entropie $kJ/kg \cdot K$	
		Liquide sat. $v_f$	Vapeur sat. $v_g$	Liquide sat. $u_f$	Vapeur sat. $u_g$	Liquide sat. $h_f$	Vapeur sat. $h_g$	Liquide sat. $s_f$	Vapeur sat. $s_g$
100	0.101 35	0.001 044	1.6729	418.94	2087.6	2506.5	2257.0	1.3069	6.0480
105	0.120 82	0.001 048	1.4194	440.02	2072.3	2512.4	2243.7	1.3630	5.9328
110	0.143 27	0.001 052	1.2102	461.14	2057.0	2518.1	2230.2	1.4185	5.8202
115	0.169 06	0.001 056	1.0366	482.30	2041.4	2523.7	2216.5	1.4734	5.7100
120	0.198 53	0.001 060	0.8919	503.50	2025.8	2529.3	2202.6	1.5276	5.6020
125	0.2321	0.001 065	0.7706	524.74	2009.9	2534.6	2188.5	1.5813	5.4962
130	0.2701	0.001 070	0.6685	546.02	1993.9	2539.9	2174.2	1.6344	5.3925
135	0.3130	0.001 075	0.5822	567.35	1977.7	2545.0	2159.6	1.6870	5.2907
140	0.3613	0.001 080	0.5089	588.74	1961.3	2550.0	2144.7	1.7391	5.1908
145	0.4154	0.001 085	0.4463	610.18	1944.7	2554.9	2129.6	1.7907	5.0926
150	0.4758	0.001 091	0.3928	631.68	1927.9	2559.5	2114.3	1.8418	4.9960
155	0.5431	0.001 096	0.3468	653.24	1910.8	2564.1	2098.6	1.8925	4.9010
160	0.6178	0.001 102	0.3071	674.87	1893.5	2568.4	2082.6	1.9427	4.8075
165	0.7005	0.001 108	0.2727	696.56	1876.0	2572.5	2066.2	1.9925	4.7153
170	0.7917	0.001 114	0.2428	718.33	1858.1	2576.5	2049.5	2.0419	4.6244
175	0.8920	0.001 121	0.2168	740.17	1840.0	2580.2	2032.4	2.0909	4.5347
180	1.0021	0.001 127	0.194 05	762.09	1821.6	2583.7	2015.0	2.1396	4.4461
185	1.1227	0.001 134	0.174 09	784.10	1802.9	2587.0	1997.1	2.1879	4.3586
190	1.2544	0.001 141	0.156 54	806.19	1783.8	2590.0	1978.8	2.2359	4.2720
195	1.3978	0.001 149	0.141 05	828.37	1764.4	2592.8	1960.0	2.2835	4.1863
200	1.5538	0.001 157	0.127 36	850.65	1744.7	2595.3	1940.7	2.3309	4.1014
205	1.7230	0.001 164	0.115 21	873.04	1724.5	2597.5	1921.0	2.3780	4.0172
210	1.9062	0.001 173	0.104 41	895.53	1703.9	2599.5	1900.7	2.4248	3.9337

TABLE A.1.1 (suite)

Vapeur saturée: table de la température

Temp. °C $T$	Pres. MPa $P$	Volume massique m <sup>3</sup> /kg		Énergie interne kJ/kg			Enthalpie kJ/kg			Entropie kJ/kg·K		
		Liquide sat. $v_f$	Vapeur sat. $v_g$	Liquide sat. $u_f$	Évap. $u_{fg}$	Vapeur sat. $u_g$	Liquide sat. $h_f$	Évap. $h_{fg}$	Vapeur sat. $h_g$	Liquide sat. $s_f$	Évap. $s_{fg}$	Vapeur sat. $s_g$
215	2.104	0.001 187	0.094 79	918.14	1682.9	2601.1	920.67	1879.9	2800.5	2.4714	3.8507	6.3221
220	2.318	0.001 190	0.086 19	940.87	1661.5	2602.4	943.62	1858.5	2802.1	2.5178	3.7683	6.2861
225	2.548	0.001 199	0.078 49	963.73	1639.6	2603.3	966.78	1836.5	2803.3	2.5639	3.6863	6.2503
230	2.795	0.001 209	0.071 58	986.74	1617.2	2603.9	990.12	1813.8	2804.0	2.6099	3.6047	6.2146
235	3.060	0.001 219	0.065 7	1009.89	1594.2	2604.1	1013.62	1790.5	2804.2	2.6558	3.5233	6.1791
240	3.344	0.001 229	0.059 76	1033.21	1570.8	2604.0	1037.32	1766.5	2803.8	2.7015	3.4422	6.1437
245	3.648	0.001 240	0.054 71	1056.71	1546.7	2603.4	1061.23	1741.7	2803.0	2.7472	3.3612	6.1083
250	3.973	0.001 251	0.050 13	1080.39	1522.0	2602.4	1085.36	1716.2	2801.5	2.7927	3.2802	6.0730
255	4.319	0.001 263	0.045 98	1104.28	1496.7	2600.9	1109.73	1689.8	2799.5	2.8383	3.1992	6.0375
260	4.688	0.001 276	0.042 21	1128.39	1470.6	2599.0	1134.37	1662.5	2796.9	2.8838	3.1181	6.0019
265	5.081	0.001 289	0.038 77	1152.74	1443.9	2596.6	1159.28	1634.4	2793.6	2.9294	3.0368	5.9662
270	5.499	0.001 302	0.035 64	1177.36	1416.3	2593.7	1184.51	1605.2	2789.7	2.9741	2.9551	5.9301
275	5.942	0.001 317	0.032 79	1202.25	1387.9	2590.2	1210.07	1574.9	2785.0	3.0208	2.8730	5.8938
280	6.412	0.001 332	0.030 17	1227.46	1358.7	2586.1	1235.99	1543.6	2779.6	3.0668	2.7903	5.8571
285	6.909	0.001 348	0.027 77	1253.00	1328.4	2581.4	1262.31	1511.0	2773.3	3.1130	2.7070	5.8199
290	7.436	0.001 366	0.025 57	1278.92	1297.1	2576.0	1289.07	1477.1	2766.2	3.1594	2.6227	5.7821
295	7.993	0.001 384	0.023 54	1305.2	1264.7	2569.9	1316.3	1441.8	2758.1	3.2062	2.5375	5.7437
300	8.581	0.001 404	0.021 67	1332.0	1231.0	2563.0	1344.0	1404.9	2749.0	3.2534	2.4511	5.7045
305	9.202	0.001 425	0.019 948	1359.3	1195.9	2555.2	1372.4	1366.4	2738.7	3.300	2.3633	5.6643
310	9.856	0.001 447	0.018 350	1387.1	1159.4	2546.4	1401.3	1326.0	2727.3	3.3493	2.2737	5.6230
315	10.547	0.001 472	0.016 867	1415.5	1121.1	2536.6	1431.0	1283.5	2714.5	3.3982	2.1821	5.5804
320	11.274	0.001 499	0.015 488	1444.6	1080.9	2525.5	1461.5	1238.6	2700.1	3.4480	2.0882	5.5362
330	12.845	0.001 561	0.012 996	1505.3	993.7	2498.9	1525.3	1140.6	2665.9	3.5907	1.8909	5.4417
340	14.586	0.001 638	0.010 797	1570.3	894.3	2464.6	1594.2	1027.9	2622.0	3.6594	1.6763	5.3357
350	16.513	0.001 740	0.008 813	1641.9	776.6	2418.4	1670.6	893.4	2563.9	3.7777	1.4335	5.2112
360	18.651	0.001 893	0.006 945	1725.2	626.3	2351.5	1760.5	720.5	2481.0	3.9147	1.1379	5.0526
370	21.03	0.002 213	0.004 925	1844.0	384.5	2228.5	1890.5	441.6	2332.1	4.1106	0.6865	4.7971
374.14	22.09	0.003 155	0.003 155	2029.6	0	2029.6	2099.3	0	2099.3	4.4298	0	4.4298

TABLE A.1.2

Vapeur saturée: table de la pression

Pres. kPa P	Temp. °C T	Volume massique m <sup>3</sup> /kg		Énergie interne kJ/kg			Enthalpie kJ/kg			Entropie kJ/kg·K		
		Liquide sat. v <sub>f</sub>	Vapeur sat. v <sub>g</sub>	Liquide sat. u <sub>f</sub>	Évap. u <sub>fg</sub>	Vapeur sat. u <sub>g</sub>	Liquide sat. h <sub>f</sub>	Évap. h <sub>fg</sub>	Vapeur sat. h <sub>g</sub>	Liquide sat. s <sub>f</sub>	Évap. s <sub>fg</sub>	Vapeur sat. s <sub>g</sub>
0.6113	0.01	0.001 000	206.14	.00	2375.3	2375.3	.01	2501.3	2501.4	.0000	9.1562	9.1562
1.0	6.98	0.001 000	129.21	29.30	2355.7	2385.0	29.30	2484.9	2514.2	1059	8.8697	8.9756
1.5	13.03	0.001 001	87.98	54.71	2338.6	2393.3	54.71	2470.6	2525.3	1957	8.6322	8.8279
2.0	17.50	0.001 001	67.00	73.48	2326.0	2399.5	73.48	2460.0	2533.5	2607	8.4629	8.7237
2.5	21.08	0.001 002	54.25	88.48	2315.9	2404.4	88.49	2451.6	2540.0	3120	8.3311	8.6432
3.0	24.08	0.001 003	45.67	101.04	2307.5	2408.5	101.05	2444.5	2545.5	3545	8.2231	8.5776
4.0	28.96	0.001 004	34.80	121.45	2293.7	2415.2	121.46	2432.9	2554.4	4226	8.0520	8.4746
5.0	32.88	0.001 005	28.19	137.81	2282.7	2420.5	137.82	2423.7	2561.5	4764	7.9187	8.3951
7.5	40.29	0.001 008	19.24	168.78	2261.7	2430.5	168.79	2406.0	2574.8	5764	7.6790	8.2515
10	45.81	0.001 010	14.67	191.82	2246.1	2437.9	191.83	2392.8	2584.7	6493	7.5009	8.1502
15	53.97	0.001 014	10.02	225.92	2222.8	2448.7	225.94	2373.1	2599.1	7549	7.2536	8.0085
20	60.06	0.001 017	7.649	251.38	2205.4	2456.7	251.40	2358.3	2609.7	8320	7.0766	7.9085
25	64.97	0.001 020	6.204	271.90	2191.2	2463.1	271.93	2346.3	2618.2	8931	6.9383	7.8314
30	69.10	0.001 022	5.229	289.20	2179.2	2468.4	289.23	2336.1	2625.3	9439	6.8247	7.7686
40	75.87	0.001 027	3.993	317.53	2159.5	2477.0	317.58	2319.2	2636.8	1.0299	6.6441	7.6700
50	81.33	0.001 030	3.240	340.44	2143.4	2483.9	340.49	2305.4	2645.9	1.0910	6.5029	7.5939
75	91.78	0.001 037	2.217	384.31	2112.4	2496.7	384.39	2278.6	2663.0	1.2130	6.2434	7.4564
MPa												
0.100	99.63	0.001 043	1.6940	417.36	2088.7	2506.1	417.46	2258.0	2675.5	1.3026	6.0568	7.3594
0.125	105.99	0.001 048	1.3749	444.19	2069.3	2513.5	444.32	2241.0	2685.4	1.3749	5.9104	7.2844
0.150	111.37	0.001 053	1.1593	466.94	2052.7	2519.7	467.11	2226.5	2693.6	1.4335	5.7897	7.2233
0.175	116.06	0.001 057	1.0036	486.80	2038.1	2524.9	486.99	2213.6	2700.6	1.4849	5.6868	7.1717
0.200	120.23	0.001 061	0.8857	504.49	2025.0	2529.5	504.70	2201.9	2706.7	1.5301	5.5970	7.1271

TABLE 1.2 (suite)  
Vapeur saturée: table de la pression

Pres. MPa P	Temp. °C T	Volume massique m <sup>3</sup> /kg		Énergie Interne kJ/kg			Enthalpie kJ/kg			Entropie kJ/kg·K	
		Liquide sat. v <sub>f</sub>	Vapeur sat. v <sub>g</sub>	Liquide sat. u <sub>f</sub>	Évap. u <sub>fg</sub>	Vapeur sat. u <sub>g</sub>	Liquide sat. h <sub>f</sub>	Évap. h <sub>fg</sub>	Vapeur sat. h <sub>g</sub>	Liquide sat. s <sub>f</sub>	Vapeur sat. s <sub>g</sub>
0.225	124.00	0.001 064	0.7933	520.47	2013.1	2533.6	520.72	2191.3	2712.1	1.5706	5.5173
0.250	127.44	0.001 067	0.7187	535.10	2002.1	2537.2	535.37	2181.5	2716.9	1.6077	5.4455
0.275	130.60	0.001 070	0.6573	548.59	1991.9	2540.5	548.89	2172.4	2721.3	1.6408	5.3801
0.300	133.55	0.001 073	0.6058	561.15	1982.4	2543.6	561.47	2163.8	2725.3	1.6718	5.3201
0.325	136.30	0.001 076	0.5620	572.90	1973.5	2546.4	573.25	2155.8	2729.0	1.7006	5.2646
0.350	138.88	0.001 079	0.5243	583.95	1965.0	2548.9	584.33	2148.1	2732.4	1.7275	5.2130
0.375	141.32	0.001 081	0.4914	594.40	1956.9	2551.3	594.81	2140.8	2735.6	1.7528	5.1647
0.40	143.63	0.001 084	0.4625	604.31	1949.3	2553.6	604.74	2133.8	2738.6	1.7766	5.1193
0.45	147.93	0.001 088	0.4140	622.77	1934.9	2557.6	623.25	2120.7	2743.9	1.8207	5.0359
0.50	151.86	0.001 093	0.3749	639.68	1921.6	2561.2	640.23	2108.5	2748.7	1.8607	4.9606
0.55	155.48	0.001 097	0.3427	655.32	1909.2	2564.5	655.93	2097.0	2753.0	1.8973	4.8920
0.60	158.85	0.001 101	0.3157	669.90	1897.5	2567.4	670.56	2086.3	2756.8	1.9312	4.8288
0.65	162.01	0.001 104	0.2927	683.56	1886.5	2570.1	684.28	2076.0	2760.3	1.9627	4.7703
0.70	164.97	0.001 108	0.2729	696.44	1876.1	2572.5	697.22	2066.3	2763.5	1.9922	4.7158
0.75	167.78	0.001 112	0.2556	708.64	1866.1	2574.7	709.47	2057.0	2766.4	2.0200	4.6647
0.80	170.43	0.001 115	0.2404	720.22	1856.6	2576.8	721.11	2048.0	2769.1	2.0462	4.6166
0.85	172.96	0.001 118	0.2270	731.27	1847.4	2578.7	732.22	2039.4	2771.6	2.0710	4.5711
0.90	175.38	0.001 121	0.2150	741.83	1838.6	2580.5	742.83	2031.1	2773.9	2.0946	4.5280
0.95	177.69	0.001 124	0.2042	751.95	1830.2	2582.1	753.02	2023.1	2776.1	2.1172	4.4869
1.00	179.91	0.001 127	0.1944	761.68	1822.0	2583.6	762.81	2015.3	2778.1	2.1387	4.4478
1.10	184.09	0.001 133	0.1775	780.09	1806.3	2586.4	781.34	2000.4	2781.7	2.1792	4.3744
1.20	187.99	0.001 139	0.1633	797.29	1791.5	2588.8	798.65	1986.2	2784.8	2.2166	4.3067
1.30	191.64	0.001 144	0.1512	813.44	1777.5	2591.0	814.93	1972.7	2787.6	2.2515	4.2438
1.40	195.07	0.001 149	0.1408	828.70	1764.1	2592.8	830.30	1959.7	2790.0	2.2842	4.1850
1.50	198.32	0.001 154	0.1317	843.16	1751.3	2594.5	844.89	1947.3	2792.2	2.3150	4.1298
1.75	205.76	0.001 166	0.1134	876.46	1721.4	2597.8	878.50	1917.9	2796.4	2.3851	4.0044
2.00	212.42	0.001 177	0.0996	906.44	1693.8	2600.3	908.79	1890.7	2799.5	2.4474	3.8935
2.25	218.45	0.001 187	0.0887	933.83	1668.2	2602.0	936.49	1865.2	2801.7	2.5035	3.7937
2.5	223.99	0.001 197	0.0799	959.31	1644.0	2603.1	962.11	1841.0	2803.1	2.5547	3.7028
3.0	233.90	0.001 217	0.0668	1004.78	1599.3	2604.1	1008.42	1795.7	2804.2	2.6457	3.5412

TABLE A.1.2 (suite)

Vapeur saturée: table de la pression

Pres. MPa $P$	Temp. °C $T$	Volume massique $m^3/kg$		Énergie interne $kJ/kg$		Enthalpie $kJ/kg$		Entropie $kJ/kg \cdot K$				
		Liquide sat. $v_f$	Vapeur sat. $v_g$	Liquide sat. $u_f$	Évap. $u_{fg}$	Vapeur sat. $u_g$	Liquide sat. $h_f$	Évap. $h_{fg}$	Vapeur sat. $h_g$	Liquide sat. $s_f$	Évap. $s_{fg}$	Vapeur sat. $s_g$
3.5	242.60	0.001 235	0.057 07	1045.43	1558.3	2603.7	1049.75	1753.7	2803.4	2.7253	3.4000	6.1253
4	250.40	0.001 252	0.049 78	1082.31	1520.0	2602.3	1087.31	1714.1	2801.4	2.7964	3.2737	6.0701
5	263.99	0.001 286	0.039 44	1147.81	1449.3	2597.1	1154.23	1640.1	2794.3	2.9202	3.0532	5.9734
6	275.64	0.001 319	0.032 44	1205.44	1384.3	2589.7	1213.35	1571.0	2784.3	3.0267	2.8625	5.8892
7	285.88	0.001 351	0.027 37	1257.55	1323.0	2580.5	1267.00	1505.1	2772.1	3.1211	2.6922	5.8133
8	295.06	0.001 384	0.023 52	1305.57	1264.2	2569.8	1316.64	1441.3	2758.0	3.2068	2.5364	5.7432
9	303.40	0.001 418	0.020 48	1350.51	1207.3	2557.8	1363.26	1378.9	2742.1	3.2858	2.3915	5.6772
10	311.06	0.001 452	0.018 026	1393.04	1151.4	2544.4	1407.56	1317.1	2724.7	3.3596	2.2544	5.6141
11	318.15	0.001 489	0.015 987	1433.7	1096.0	2529.8	1450.1	1255.5	2705.6	3.4295	2.1233	5.5527
12	324.75	0.001 527	0.014 263	1473.0	1040.7	2513.7	1491.3	1193.6	2684.9	3.4962	1.9962	5.4924
13	330.93	0.001 567	0.012 780	1511.1	985.0	2496.1	1531.5	1130.7	2662.2	3.5606	1.8718	5.4323
14	336.75	0.001 611	0.011 485	1548.6	928.2	2476.8	1571.1	1066.5	2637.6	3.6232	1.7485	5.3717
15	342.24	0.001 658	0.010 337	1585.6	869.8	2455.5	1610.5	1000.0	2610.5	3.6848	1.6249	5.3098
16	347.44	0.001 711	0.009 306	1622.7	809.0	2431.7	1650.1	930.6	2580.6	3.7461	1.4994	5.2455
17	352.37	0.001 770	0.008 364	1660.2	744.8	2405.0	1690.3	856.9	2547.2	3.8079	1.3698	5.1777
18	357.06	0.001 840	0.007 489	1698.9	675.4	2374.3	1732.0	777.1	2509.1	3.8715	1.2329	5.1044
19	361.54	0.001 924	0.006 657	1739.9	598.1	2338.1	1776.5	688.0	2464.5	3.9388	1.0839	5.0228
20	365.81	0.002 036	0.005 834	1785.6	507.5	2293.0	1826.3	583.4	2409.7	4.0139	0.9130	4.9269
21	369.89	0.002 207	0.004 952	1842.1	388.5	2230.6	1888.4	446.2	2334.6	4.1075	0.6938	4.8013
22	373.80	0.002 742	0.003 568	1961.9	125.2	2087.1	2022.2	143.4	2165.6	4.3110	0.2216	4.5327
22.09	374.14	0.003 155	0.003 155	2029.6	0	2029.6	2099.3	0	2099.3	4.4298	0	4.4298



TABLE A 1.3

## Vapeur surchauffée

T	P = .010 MPa (45.81)					P = .050 MPa (81.33)					P = .10 MPa (99.63)				
	v	u	h	s	f	v	u	h	s	f	v	u	h	s	f
Sat	14.674	2437.9	2584.7	8.1502		3.240	2483.9	2645.9	7.5939		1.6940	2506.1	2675.5	7.3594	
50	14.869	2443.9	2592.6	8.1749											
100	17.196	2515.5	2687.5	8.4479		3.418	2511.6	2682.5	7.6947		1.6958	2506.7	2676.2	7.3614	
150	19.512	2587.9	2783.0	8.6882		3.889	2585.6	2780.1	7.9401		1.9364	2582.8	2776.4	7.6134	
200	21.825	2661.3	2879.5	8.9038		4.356	2659.9	2877.7	8.1580		2.172	2658.1	2875.3	7.8343	
250	24.136	2736.0	2977.3	9.1002		4.820	2735.0	2976.0	8.3556		2.406	2733.7	2974.3	8.0333	
300	26.445	2812.1	3076.5	9.2813		5.284	2811.3	3075.5	8.5373		2.639	2810.4	3074.3	8.2158	
400	31.063	2968.9	3279.6	9.6077		6.209	2968.5	3278.9	8.8642		3.103	2967.9	3278.2	8.5435	
500	35.679	3132.3	3489.1	9.8978		7.134	3132.0	3488.7	9.1546		3.565	3131.6	3488.1	8.8342	
600	40.295	3302.5	3705.4	10.1608		8.057	3302.2	3705.1	9.4178		4.028	3301.9	3704.7	9.0976	
700	44.911	3479.6	3928.7	10.4028		8.981	3479.4	3928.5	9.6599		4.490	3479.2	3928.2	9.3398	
800	49.526	3663.8	4159.0	10.6281		9.904	3663.6	4158.9	9.8852		4.952	3663.5	4158.6	9.5652	
900	54.141	3855.0	4396.4	10.8396		10.828	3854.9	4396.3	10.0967		5.414	3854.8	4396.1	9.7767	
1000	58.757	4053.0	4640.6	11.0393		11.751	4052.9	4640.5	10.2964		5.875	4052.8	4640.3	9.9764	
1100	63.372	4257.5	489.2	11.2287		12.674	4257.4	4891.1	10.4859		6.337	4257.3	4891.0	10.1659	
1200	67.987	4467.9	5147.8	11.4091		13.597	4467.8	5147.7	10.6662		6.799	4467.7	5147.6	10.3463	
1300	72.602	4683.7	5409.7	11.5811		14.521	4683.6	5409.6	10.8382		7.260	4683.5	5409.5	10.5183	
Sat	P = .20 MPa (120.23)					P = .30 MPa (133.55)					P = .40 MPa (143.63)				
	v	u	h	s	f	v	u	h	s	f	v	u	h	s	f
150	8857	2529.5	2706.7	7.1272		6058	2543.6	2725.3	6.9919		4625	2553.6	2738.6	6.8959	
200	9596	2576.9	2763.8	7.2795		6339	2570.8	2761.0	7.0778		4708	2564.5	2752.8	6.9299	
250	1.0803	2654.4	2870.5	7.5066		7163	2650.7	2865.6	7.3115		5342	2646.8	2860.5	7.1706	
300	1.1988	2731.2	2971.0	7.7086		7964	2728.7	2967.6	7.5166		5951	2726.1	2964.2	7.3789	
350	1.3162	2808.6	3071.8	7.8926		8753	2806.7	3069.3	7.7022		6548	2804.8	3066.8	7.5662	
400	1.5493	2966.7	3275.6	8.2218		10315	2965.6	3275.0	8.0330		7726	2964.4	3273.4	7.8985	

**TABLE A.1.3 (suite)**  
**Valeur surchauffée**

Vapeur surchauffée																
T	v	u	h	s	P = 20 MPa (120.23)			P = 30 MPa (133.55)			P = 40 MPa (143.63)					
500	1.7814	3130.8	3487.1	8.5133	1.1867	3130.0	3486.0	8.3251	1.867	3130.0	3486.0	8.3251	.8893	3129.2	3484.9	8.1913
600	2.013	3301.4	3704.0	8.7770	1.3414	3300.8	3703.2	8.5892	1.414	3300.8	3703.2	8.5892	1.0055	3300.2	3702.4	8.4558
700	2.244	3478.8	3927.6	9.0194	1.4957	3478.4	3927.1	8.8319	1.4957	3478.4	3927.1	8.8319	1.1215	3477.9	3926.5	8.6987
800	2.475	3663.1	4158.2	9.2449	1.6499	3662.9	4157.8	9.0576	1.6499	3662.9	4157.8	9.0576	1.2372	3662.4	4157.3	8.9244
900	2.706	3854.5	4395.8	9.4566	1.8041	3854.2	4395.4	9.2692	1.8041	3854.2	4395.4	9.2692	1.3529	3853.9	4395.1	9.1362
1000	2.937	4052.5	4640.0	9.6563	1.9581	4052.3	4639.7	9.4690	1.9581	4052.3	4639.7	9.4690	1.4685	4052.0	4639.4	9.3360
1100	3.168	4257.0	4890.7	9.8458	2.1121	4256.8	4890.4	9.6585	2.1121	4256.8	4890.4	9.6585	1.5840	4256.5	4890.2	9.5256
1200	3.399	4467.5	5147.3	10.0262	2.2661	4467.2	5147.1	9.8389	2.2661	4467.2	5147.1	9.8389	1.6996	4467.0	5146.8	9.7060
1300	3.630	4683.2	5409.3	10.1982	2.4201	4683.0	5409.0	10.0110	2.4201	4683.0	5409.0	10.0110	1.8151	4682.8	5408.8	9.8780
P = .50 MPa (151.86)											P = .60 MPa (158.85)					
Sat	3.749	2561.2	2748.7	6.8213	3.157	2567.4	2756.8	6.7600	3.157	2567.4	2756.8	6.7600	2.404	2576.8	2769.1	6.6628
200	4.249	2642.9	2855.4	7.0592	3.520	2638.9	2850.1	6.9665	3.520	2638.9	2850.1	6.9665	2.608	2640.6	2839.3	6.8158
250	4.744	2723.5	2962.7	7.2709	3.938	2720.9	2957.2	7.1816	3.938	2720.9	2957.2	7.1816	2.931	2715.5	2950.0	7.0384
300	5.226	2802.9	3064.2	7.4599	4.344	2801.0	3061.6	7.3724	4.344	2801.0	3061.6	7.3724	3.241	2797.2	3056.5	7.2328
350	5.701	2882.6	3167.7	7.6329	4.742	2881.2	3165.7	7.5464	4.742	2881.2	3165.7	7.5464	3.544	2878.2	3161.7	7.4089
400	6.173	2963.2	3271.9	7.7938	5.137	2962.1	3270.3	7.7079	5.137	2962.1	3270.3	7.7079	3.843	2959.7	3267.1	7.5716
500	7.109	3128.4	3483.9	8.0873	5.920	3127.6	3482.8	8.0021	5.920	3127.6	3482.8	8.0021	4.433	3126.0	3480.6	7.8673
600	8.041	3299.6	3701.7	8.3522	6.697	3299.1	3700.9	8.2674	6.697	3299.1	3700.9	8.2674	5.018	3297.9	3699.4	8.1333
700	8.969	3477.5	3925.9	8.5952	7.472	3477.0	3925.3	8.5107	7.472	3477.0	3925.3	8.5107	5.601	3476.2	3924.2	8.3770
800	9.896	3662.1	4156.9	8.8211	8.245	3661.8	4156.5	8.7367	8.245	3661.8	4156.5	8.7367	6.181	3661.1	4155.6	8.6033
900	1.0822	3853.6	4394.7	9.0329	9.017	3853.4	4394.4	8.9486	9.017	3853.4	4394.4	8.9486	6.761	3852.8	4393.7	8.8551
1000	1.1747	4051.8	4639.1	9.2328	9.788	4051.5	4638.8	9.1485	9.788	4051.5	4638.8	9.1485	7.340	4051.0	4638.2	9.0153

TABLE A.1.3 (suite)  
Vapeur surchauffée

$T$	$v$	$w$	$h$	$s$	$v$	$w$	$h$	$s$	$v$	$w$	$h$	$s$		
$P = 50 \text{ MPa (151.86)}$					$P = 60 \text{ MPa (158.85)}$					$P = 80 \text{ MPa (170.43)}$				
1100	1.2672	4256.3	4889.9	9.4224	1.0559	4256.1	4889.6	9.3381	7919	4255.6	4889.1	9.2050		
1200	1.3596	4466.8	5146.6	9.6029	1.1330	4466.5	5146.3	9.5185	8497	4466.1	5145.9	9.3855		
1300	1.4521	4682.5	5408.6	9.7749	1.2101	4682.3	5408.3	9.6906	9076	4681.8	5407.9	9.5575		
$P = 1.00 \text{ MPa (179.91)}$					$P = 1.20 \text{ MPa (187.99)}$					$P = 1.40 \text{ MPa (195.07)}$				
Sat	194.44	2583.6	2778.1	6.5865	163.33	2588.8	2784.8	6.5233	140.84	2592.8	2790.0	6.4693		
200	2060	2621.9	2827.9	6.6940	169.30	2612.8	2815.9	6.5898	143.02	2603.1	2803.3	6.4975		
250	2327	2709.9	2942.6	6.9247	192.34	2704.2	2935.0	6.8294	163.50	2698.3	2927.2	6.7467		
300	2579	2793.2	3051.2	7.1229	2138	2789.2	3045.8	7.0317	182.28	2785.2	3040.4	6.9534		
350	2825	2875.2	3157.7	7.3011	2345	2872.2	3153.6	7.2121	2003	2869.2	3149.5	7.1360		
400	3066	2957.3	3263.9	7.4651	2548	2954.9	3260.7	7.3774	2178	2952.5	3257.5	7.3026		
500	3541	3124.4	3478.5	7.7622	2946	3122.8	3476.3	7.6759	2521	3121.1	3474.1	7.6027		
600	4011	3296.8	3697.9	8.0290	3339	3295.6	3696.3	7.9435	2860	3294.4	3694.8	7.8710		
700	4478	3475.3	3923.1	8.2731	3729	3474.4	3922.0	8.1881	3195	3473.6	3920.8	8.1160		
800	4943	3660.4	4154.7	8.4996	4118	3659.7	4153.8	8.4148	3528	3659.0	4153.0	8.3431		
900	5407	3852.2	4392.9	8.7118	4505	3851.6	4392.2	8.6272	3861	3851.1	4391.5	8.5556		
1000	5871	4050.5	4637.6	8.9119	4892	4050.0	4637.0	8.8274	4192	4049.5	4636.4	8.7559		
1100	6335	4255.1	4888.6	9.1017	5278	4254.6	4888.0	9.0172	4524	4254.1	4887.5	8.9457		
1200	6798	4465.6	5144.9	9.2822	5665	4465.1	5144.9	9.1977	4855	4464.7	5144.4	9.1262		
1300	7261	4681.3	5407.4	9.4543	6051	4680.9	5407.0	9.3698	5186	4680.4	5406.5	9.2984		
$P = 1.60 \text{ MPa (201.41)}$					$P = 1.80 \text{ MPa (207.15)}$					$P = 2.00 \text{ MPa (212.42)}$				
Sat	123.80	2596.0	2794.0	6.4218	110.42	2598.4	2797.1	6.3794	109.63	2600.3	2799.5	6.3409		
225	132.87	2644.7	2857.3	6.5518	116.73	2636.6	2846.7	6.4808	103.77	2628.3	2835.8	6.4147		
250	141.84	2692.3	2919.2	6.6732	124.97	2686.0	2911.0	6.6066	111.44	2679.6	2902.5	6.5453		
300	158.62	2781.1	3034.8	6.8844	140.21	2776.9	3029.2	6.8226	125.47	2772.6	3023.5	6.7664		
350	174.56	2866.1	3145.4	7.0694	154.57	2863.0	3141.2	7.0100	138.57	2859.8	3137.0	6.9563		
400	190.05	2950.1	3254.2	7.2374	168.47	2947.7	3250.9	7.1794	151.20	2945.2	3247.6	7.1271		
500	2203	3119.5	3472.0	7.5390	195.50	3117.9	3469.8	7.4825	175.68	3116.2	3467.6	7.4317		
600	2500	3293.3	3693.2	7.8080	2220	3292.1	3691.7	7.7523	199.60	3290.9	3690.1	7.7024		
700	2794	3472.7	3919.7	8.0535	2482	3471.8	3918.5	7.9983	2232	3470.9	3917.4	7.9487		

TABLE A.1.3 (suite)  
Vapeur surchauffée

T	P = 1.60 MPa (201.41)					P = 1.80 MPa (207.15)					P = 2.00 MPa (212.42)				
	v	w	h	s	r	v	w	h	s	r	v	w	h	s	r
800	3086	3658.3	4152.1	8.2808		2742	3657.6	4151.2	8.2258		2467	3657.0	4150.3	8.1765	
900	3377	3850.5	4390.8	8.4935		3001	3849.9	4390.1	8.4386		2700	3849.3	4389.4	8.3895	
1000	3668	4049.0	4635.8	8.6938		3260	4048.5	4635.2	8.6391		2933	4048.0	4634.6	8.5901	
1100	3958	4253.7	4887.0	8.8837		3518	4253.2	4886.4	8.8290		3166	4252.7	4885.9	8.7800	
1200	4248	4464.2	5143.9	9.0643		3776	4463.7	5143.4	9.0096		3398	4463.3	5142.9	8.9607	
1300	4538	4679.9	5406.0	9.2364		4034	4679.5	5405.6	9.1818		3631	4679.0	5405.1	9.1329	
	P = 2.50 MPa (223.99)					P = 3.00 MPa (233.90)					P = 3.50 MPa (242.60)				
Sat.	079.98	2603.1	2803.1	6.2575		066.68	2604.1	2804.2	6.1869		057.07	2603.7	2803.4	6.1253	
225	080.27	2605.6	2806.3	6.2639											
250	087.00	2662.6	2880.1	6.4085		070.58	2644.0	2855.8	6.2872		058.72	2623.7	2829.2	6.1749	
300	098.90	2761.6	3008.8	6.6438		081.14	2750.1	2993.5	6.5390		068.42	2738.0	2977.5	6.4461	
350	109.76	2851.9	3126.3	6.8403		090.53	2843.7	3115.3	6.7428		076.78	2835.3	3104.0	6.6579	
400	120.10	2939.1	3239.3	7.0148		099.36	2932.8	3230.9	6.9212		084.53	2926.4	3222.3	6.8405	
450	130.14	3025.5	3350.8	7.1746		107.87	3020.4	3344.0	7.0834		091.96	3015.3	3337.2	7.0052	
500	139.98	3112.1	3452.1	7.3234		116.19	3108.0	3456.5	7.2338		099.18	3103.8	3450.9	7.1572	
600	159.30	3288.0	3686.3	7.5960		132.43	3285.0	3682.3	7.5085		113.24	3282	3678.4	7.4339	
700	178.32	3468.7	3914.5	7.8435		148.38	3466.5	3911.7	7.7571		126.99	3464.3	3908.8	7.6837	
800	197.16	3655.3	4148.2	8.0720		164.14	3653.5	4145.9	7.9862		140.56	3651.8	4143.7	7.9134	
900	215.90	3847.9	4387.6	8.2853		179.80	3846.5	4385.9	8.1999		154.02	3845.8	4384.1	8.1276	
1000	234.6	4046.7	4633.2	8.4861		195.41	4045.4	4631.6	8.4009		167.43	4044	4630.1	8.3288	
1100	253.2	4251.5	4884.6	8.6762		210.98	4250.3	4883.3	8.5912		180.80	4249.7	4881.9	8.5192	
1200	271.8	4462.1	5141.7	8.8569		226.52	4460.9	5140.5	8.7720		194.15	4459.8	5139.3	8.7000	
1300	290.5	4677.8	5404.0	9.0291		242.06	4676.6	5402.8	8.9442		207.49	4675.5	5401.7	8.8723	

TABLE A 1.3 (suite)  
Vapeur surchauffée

T	P = 4.0 MPa (250.40)						P = 5.0 MPa (263.99)					
	v	w	h	s	u	x	h	s	u	w	h	s
Sat.	049.78	2602.3	280.4	6.0701	044.06	2600.1	2798.3	6.0198	039.44	2597.1	2794.3	5.9714
275	054.57	2667.9	2886.2	6.2285	047.30	2650.3	2863.2	6.1401	041.41	2631.3	2838.3	6.0544
300	058.84	2725.3	2960.7	6.3615	051.35	2712.0	2943.1	6.2828	045.32	2698.0	2924.5	6.2084
350	066.45	2826.7	3092.5	6.5821	058.40	2817.8	3080.6	6.5131	051.94	2808.7	3068.4	6.4491
400	073.41	2919.9	3213.6	6.7690	064.75	2913.3	3204.7	6.7047	057.81	2906.6	3195.7	6.6459
450	080.02	3010.2	3330.3	6.9363	070.74	3005.0	3321.3	6.8746	063.30	2999.7	3316.2	6.8186
500	086.43	3099.5	3445.3	7.0901	076.51	3095.3	3439.6	7.0301	068.57	3091.0	3433.8	6.9759
600	098.85	3279.1	3674.4	7.3688	087.65	3276.0	3670.5	7.3110	078.69	3273.0	3666.5	7.2589
700	110.95	3462.1	3905.9	7.6198	098.47	3459.9	3903.0	7.5631	088.49	3457.6	3900.1	7.5122
800	122.87	3650.0	4141.5	7.8502	109.11	3648.3	4139.3	7.7942	098.11	3646.6	4137.1	7.7440
900	134.69	3843.6	4382.3	8.0647	119.65	3842.2	4380.6	8.0091	107.62	3840.7	4378.8	7.9593
1000	146.45	4042.9	4628.7	8.2662	130.13	4041.6	4627.2	8.2108	117.07	4040.4	4625.7	8.1612
1100	158.17	4248.0	4880.6	8.4567	140.56	4246.8	4879.3	8.4015	126.48	4245.6	4878.0	8.1520
1200	169.87	4458.6	5138.1	8.6376	150.98	4457.5	5136.9	8.5825	135.87	4456.3	5135.7	8.5331
1300	181.56	4674.3	5400.5	8.8100	161.39	4673.1	5399.4	8.7549	145.26	4672.0	5398.2	8.7055
Sal.	P = 6.0 MPa (275.64)						P = 7.0 MPa (285.88)					
	v	w	h	s	u	x	h	s	u	w	h	s
Sal.	032.44	2589.7	2784.3	5.8892	027.37	2580.5	2772.1	5.8133	023.52	2569.8	2758.0	5.7412
300	036.16	2667.2	2884.2	6.0674	029.47	2632.2	2838.4	5.9305	024.26	2590.9	2785.0	5.7906
350	042.23	2789.6	3043.0	6.1335	035.24	2769.4	3016.0	6.2283	029.95	2747.7	2987.3	6.1301
400	047.39	2892.9	3177.2	6.5408	039.93	2878.6	3158.1	6.4478	034.32	2863.8	3138.3	6.3634
450	052.14	2988.9	3301.8	6.7193	044.16	2978.0	3287.1	6.6327	038.17	2966.7	3272.0	6.5551
500	056.65	3082.2	3422.2	6.8803	048.14	3073.4	3410.3	6.7975	041.75	3064.3	3398.3	6.7240
550	061.01	3174.6	3540.6	7.0288	051.95	3167.2	3530.9	6.9486	045.16	3159.8	3521.0	6.8778
600	065.25	3266.9	3658.4	7.1677	055.65	3260.7	3650.3	7.0894	048.45	3254.4	3642.0	7.0206
700	073.52	3453.1	3894.2	7.4234	062.83	3448.5	3888.3	7.3476	054.81	3443.9	3882.4	7.2812
800	081.60	3643.1	4132.7	7.6566	069.81	3639.5	4128.2	7.5822	060.97	3636.0	4123.8	7.5173
900	089.58	3837.8	4375.3	7.8727	076.69	3835.0	4371.8	7.7991	067.02	3832.1	4368.3	7.7351
1000	097.49	4037.8	4622.7	8.0751	083.50	4035.3	4619.8	8.0020	073.01	4032.8	4616.9	7.9384
1100	105.36	4243.3	4875.4	8.2661	090.27	4240.9	4872.8	8.1933	078.96	4238.6	4870.3	8.1100

TABLE A.1.3 (suite)  
Vapeur surchauffée

$T$	$\rho$	$u$	$h$	$s$	$v$	$h$	$s$	$u$	$h$	$s$	
$P = 6.0 \text{ MPa (275.64)}$											
1200	113.21	4454.0	5133.3	8.4474	0.09703	4451.7	5130.9	8.3747	0.08489	4449.5	
1300	121.06	4669.6	5396.0	8.6199	0.10377	4667.3	5393.7	8.5473	0.09080	4665.0	
$P = 9.0 \text{ MPa (303.40)}$											
Sat.	020.48	2557.8	2742.1	5.6772	0.18026	2544.4	2724.7	5.6141	0.13495	2505.1	
325	023.27	2646.6	2856.0	5.8712	0.19861	2610.4	2809.1	5.7568	0.16126	2624.6	
350	025.80	2724.4	2956.6	6.0361	0.2242	2699.2	2923.4	5.9443	0.20000	2789.3	
400	029.93	2848.4	3117.8	6.2854	0.2641	2832.4	3096.5	6.2120	0.22999	2912.5	
450	033.50	2955.2	3256.6	6.4844	0.2975	2943.4	3240.9	6.4190	0.25600	3021.7	
500	036.77	3055.2	3386.1	6.6576	0.3279	3045.8	3373.7	6.5966	0.28001	3125.0	
550	039.87	3152.2	3511.0	6.8142	0.3564	3144.6	3500.9	6.7561	0.30299	3225.4	
600	042.85	3248.1	3633.7	6.9589	0.3837	3241.7	3625.3	6.9029	0.32488	3324.4	
650	045.74	3343.6	3755.3	7.0943	0.4101	3338.2	3748.2	7.0398	0.34600	3422.9	
700	048.57	3439.3	3876.5	7.2221	0.4358	3434.7	3870.5	7.1687	0.36699	3520.0	
800	054.09	3632.5	4119.3	7.4596	0.4859	3628.9	4114.8	7.4077	0.42677	3819.1	
900	059.50	3829.2	4364.8	7.6783	0.5349	3826.3	4361.2	7.6272	0.46588	4021.6	
1000	064.85	4030.3	4614.0	7.8821	0.5832	4027.8	4611.0	7.8315	0.50455	4228.2	
1100	070.16	4236.3	4867.7	8.0740	0.6312	4234.0	4865.1	8.0237	0.54303	4439.3	
1200	075.44	4447.2	5126.2	8.2556	0.6789	4444.9	5123.8	8.2055	0.58133	4654.8	
1300	080.72	4662.7	5389.2	8.4284	0.7265	4460.5	5387.0	8.3783	$P = 20.0 \text{ MPa (365.81)}$		
$P = 15.0 \text{ MPa (342.24)}$											
Sat.	010.337	2455.5	2610.5	5.3098	0.07920	2390.2	2528.8	5.1419	0.05834	2293.0	
350	011.470	2520.4	2692.4	5.4421							4.9269

TABLE A.1.3 (suite)  
Vapeur surchauffée

T	P = 15.0 MPa (342.24)					P = 17.5 MPa (354.75)					P = 20.0 MPa (365.81)				
	v	u	h	s	x	v	u	h	s	x	v	u	h	s	x
400	.015 649	2740.7	2975.5	5.8811		.012 447	2685.0	2902.9	5.7213		.009 942	2619.3	2818.1	5.5540	
450	.018 445	2879.5	3156.2	6.1404		.015 174	2844.2	3109.7	6.0184		.012 695	2806.2	3060.1	5.9017	
500	.020 80	2996.6	3308.6	6.3443		.017 358	2970.3	3274.1	6.2383		.014 768	2942.9	3238.2	6.1401	
550	.022 93	3104.7	3448.6	6.5199		.019 288	3083.9	3421.4	6.4230		.016 555	3062.4	3393.5	6.3348	
600	.024 91	3208.6	3582.3	6.6776		.021 06	3191.5	3560.1	6.5866		.018 178	3174.0	3537.6	6.5048	
650	.026 80	3310.3	3712.3	6.8224		.022 74	3296.0	3693.9	6.7357		.019 693	3281.4	3675.3	6.6582	
700	.028 61	3410.9	3840.1	6.9572		.024 34	3398.7	3824.6	6.8736		.021 13	3386.4	3809.0	6.7993	
800	.032 10	3610.9	4092.4	7.2040		.027 38	3601.8	4081.1	7.1244		.023 85	3592.7	4069.7	7.0544	
900	.035 46	3811.9	4343.8	7.4279		.030 31	3804.7	4335.1	7.3507		.026 45	3793.5	4326.4	7.2830	
1000	.038 75	4015.4	4596.6	7.6348		.033 16	4009.3	4589.5	7.5589		.028 97	4003.1	4582.5	7.4925	
1100	.042 00	4222.6	4852.6	7.8283		.035 97	4216.9	4846.4	7.7531		.031 45	4211.3	4840.2	7.6874	
1200	.045 23	4433.8	5112.3	8.0108		.038 76	4428.3	5106.6	7.9360		.033 91	4422.8	5101.0	7.8707	
1300	.048 45	4649.1	5376.0	8.1840		.041 54	4643.5	5370.5	8.1093		.036 36	4638.0	5365.1	8.0442	
<b>P = 25.0 MPa</b>															
375	.001 973 1	1798.7	1848.0	4.0320		.001 789 2	1737.8	1791.5	3.9305		.001 700 3	1702.9	1762.4	3.8722	
400	.006 004	2430.1	2580.2	5.1418		.002 790	2067.4	2151.1	4.4728		.002 100	1914.1	1987.6	4.2126	
425	.007 881	2609.2	2806.3	5.4723		.005 303	2455.1	2614.2	5.1504		.003 428	2253.4	2373.4	4.7747	
450	.009 162	2720.7	2949.7	5.6744		.006 735	2619.3	2821.4	5.4424		.004 961	2498.7	2672.4	5.1962	
500	.011 123	2884.3	3162.4	5.9592		.008 678	2820.7	3081.1	5.7905		.006 927	2751.9	2994.4	5.6282	
550	.012 724	3017.5	3335.6	6.1765		.010 168	2970.1	3275.4	6.0342		.008 345	2921.0	3213.0	5.9026	
600	.014 137	3137.9	3491.4	6.3602		.011 446	3100.5	3443.9	6.2331		.009 527	3062.0	3395.5	6.1179	
650	.015 433	3251.6	3637.4	6.5229		.012 596	3221.0	3598.9	6.4058		.010 575	3189.8	3559.9	6.3010	
700	.016 646	3361.3	3777.5	6.6707		.013 661	3333.8	3745.6	6.5606		.011 533	3309.8	3713.5	6.4631	
800	.018 912	3574.3	4047.1	6.9345		.015 623	3555.5	4024.2	6.8332		.013 278	3536.7	4001.5	6.7450	
900	.021 045	3783.0	4309.1	7.1680		.017 448	3768.5	4291.9	7.0718		.014 883	3754.0	4274.9	6.9886	
1000	.023 10	3990.9	4568.5	7.3802		.019 196	3978.8	4554.7	7.2867		.016 410	3966.7	4541.1	7.2064	
1100	.025 12	4200.2	4828.2	7.5765		.020 903	4189.2	4816.3	7.4845		.017 895	4178.3	4804.6	7.4057	

TABLE A.1.3 (suite)

Vapeur surchauffée

T	v	u	h	s	v	u	h	s	v	u	h	s
P = 25.0 MPa												
1200	.027 11	4412.0	5089.9	7.7605	.022 589	4401.3	5079.0	7.6692	.019 360	4390.7	5068.3	7.5910
1300	.029 10	4626.9	5354.4	7.9342	.024 266	4616.0	5344.0	7.8432	.020 815	4605.1	5333.6	7.7653
P = 40.0 MPa												
375	.001 640 7	1677.1	1742.8	3.8290	.001 559 4	1638.6	1716.6	3.7639	.001 502 8	1609.4	1699.5	3.7141
400	.001 907 7	1854.6	1930.9	4.1135	.001 730 9	1788.1	1874.6	4.0031	.001 633 5	1745.4	1843.4	3.9318
425	.002 532	2096.9	2198.1	4.5029	.002 007	1959.7	2060.0	4.2734	.001 816 5	1892.7	2001.7	4.1626
450	.003 693	2365.1	2512.8	4.9459	.002 486	2159.6	2284.0	4.5884	.002 085	2053.9	2179.0	4.4121
500	.005 622	2678.4	2903.3	5.4700	.003 892	2525.5	2720.1	5.1726	.002 956	2390.6	2567.9	4.9321
550	.006 984	2869.7	3149.1	5.7785	.005 118	2763.6	3019.5	5.5485	.003 956	2658.8	2896.2	5.3441
600	.008 094	3022.6	3346.4	6.0114	.006 112	2942.0	3247.6	5.8178	.004 834	2863.1	3151.2	5.6452
650	.009 063	3158.0	3520.6	6.2054	.006 966	3093.5	3441.8	6.0342	.005 595	3028.8	3364.5	5.8829
700	.009 941	3283.6	3681.2	6.3750	.007 727	3230.5	3616.8	6.2189	.006 272	3177.2	3553.5	6.0824
800	.011 523	3517.8	3978.7	6.6662	.009 076	3479.8	3933.6	6.5290	.007 459	3441.5	3889.1	6.4109
900	.012 962	3739.4	4257.9	6.9150	.010 283	3710.3	4224.4	6.7882	.008 508	3681.0	4191.5	6.6805
1000	.014 324	3954.6	4527.6	7.1356	.011 411	3930.5	4501.1	7.0146	.009 480	3906.4	4475.2	6.9127
1100	.015 642	4167.4	4793.1	7.3364	.012 496	4145.7	4770.5	7.2184	.010 409	4124.1	4748.6	7.1195
1200	.016 940	4380.1	5057.7	7.5224	.013 561	4359.1	5037.2	7.4058	.011 317	4338.2	5017.2	7.3083
1300	.018 229	4594.3	5323.5	7.6969	.014 616	4572.8	5303.5	7.5808	.012 215	4551.4	5284.3	7.4837
P = 60.0 MPa												



TABLE A 1.4  
Liquide comprimé

T	P = 5 MPa (263.99)					P = 10 MPa (311.06)					P = 15 MPa (342.24)				
	v	u	h	s	z	v	u	h	z	z	v	u	h	z	z
Sat	.001 285 9	1147.8	1154.2	2.9202		.001 452 4	1393.0	1407.6	3.3596		.001 658 1	1585.6	1610.5	3.6848	
0	.000 997 7	.04	5.04	.0001		.000 995 2	.09	10.04	.0002		.000 992 8	.15	15.05	.0004	
20	.000 999 5	83.65	88.65	.2956		.000 997 2	83.36	93.33	.2945		.000 995 0	83.06	97.99	.2934	
40	.001 005 6	166.95	171.97	.5705		.001 003 4	166.35	176.38	.5686		.001 001 3	165.76	180.78	.5666	
60	.001 014 9	250.23	255.30	.8285		.001 012 7	249.36	259.49	.8258		.001 010 5	248.51	263.67	.8232	
80	.001 026 8	333.72	338.85	1.0720		.001 024 5	332.59	342.83	1.0688		.001 022 2	331.48	346.81	1.0656	
100	.001 041 0	417.52	422.72	1.3030		.001 038 5	416.12	426.50	1.2992		.001 036 1	414.74	430.28	1.2955	
120	.001 057 6	501.80	507.09	1.5233		.001 054 9	500.08	510.64	1.5189		.001 052 2	498.40	514.19	1.5145	
140	.001 076 8	586.76	592.15	1.7343		.001 073 7	584.68	595.42	1.7292		.001 070 7	582.66	598.72	1.7242	
160	.001 098 8	672.62	678.12	1.9375		.001 095 3	670.13	681.08	1.9317		.001 091 8	667.71	684.09	1.9260	
180	.001 124 0	759.63	765.25	2.1341		.001 119 9	756.65	767.84	2.1275		.001 115 9	753.76	770.50	2.1210	
200	.001 153 0	848.1	853.9	2.3255		.001 148 0	844.5	856.0	2.3178		.001 143 3	841.0	858.2	2.3104	
220	.001 186 6	938.4	944.4	2.5128		.001 180 5	934.1	945.9	2.5039		.001 174 8	929.9	947.5	2.4953	
240	.001 226 4	1031.4	1037.5	2.6979		.001 218 7	1026.0	1038.1	2.6872		.001 211 4	1020.8	1039.0	2.6771	
260	.001 274 9	1127.9	1134.3	2.8830		.001 264 5	1121.1	1133.7	2.8699		.001 255 0	1114.6	1133.4	2.8576	
280						.001 321 6	1220.9	1234.1	3.0548		.001 308 4	1212.5	1232.1	3.0393	
300						.001 397 2	1328.4	1342.3	3.2469		.001 377 0	1316.6	1337.3	3.2260	
320											.001 472 4	1431.1	1453.2	3.4247	
340											.001 631.1	1567.5	1591.9	3.6546	

TABLE A.1.4 (suite)

Liquide comprimé

T	P = 20 MPa (365.81)				P = 30 MPa				P = 50 MPa			
	v	w	h	r	v	u	h	s	v	u	h	s
Sal	.002 036	1785.6	1826.3	4.0139	.000 985 6	25	29.82	.0001	.000 976 6	20	49.03	.0014
0	.000 990 4	19	20.01	.0004	.000 988 6	82.17	111.84	.2899	.000 980 4	81.00	130.02	.2848
20	.000 992 8	82.77	102.62	.2923	.000 995 1	164.04	193.89	.5607	.000 987 2	161.86	211.21	.5527
40	.000 999 2	165.17	185.16	.5646	.001 004 2	246.06	276.19	.8154	.000 996 2	242.98	292.79	.8052
60	.001 008 4	247.68	267.85	.8206	.001 015 6	328.30	358.77	1.0561	.001 007 3	324.34	374.70	1.0440
80	.001 019 9	330.40	350.80	1.0624	.001 029 0	410.78	441.66	1.2844	.001 020 1	405.88	456.89	1.2703
100	.001 033 7	413.39	434.06	1.2917	.001 044 5	493.59	524.93	1.5018	.001 034 8	487.65	539.39	1.4857
120	.001 049 6	496.76	517.76	1.5102	.001 062 1	576.88	608.75	1.7098	.001 051 5	569.77	622.35	1.6915
140	.001 067 8	580.69	602.04	1.7193	.001 082 1	660.82	693.28	1.9096	.001 070 3	652.41	705.92	1.8891
160	.001 088 5	665.35	687.12	1.9204	.001 104 7	745.59	778.73	2.1024	.001 091 2	735.69	790.25	2.0794
180	.001 112 0	750.95	773.20	2.1147	.001 130 2	831.4	865.3	2.2893	.001 114 6	819.7	875.5	2.2634
200	.001 138 8	837.7	860.5	2.3031	.001 159 0	918.3	953.1	2.4711	.001 140 8	904.7	961.7	2.4419
220	.001 169 3	925.9	949.3	2.4870	.001 192 0	1006.9	1042.6	2.6490	.001 170 2	990.7	1049.2	2.6158
240	.001 204 6	1016.0	1040.0	2.6674	.001 230 3	1097.4	1134.3	2.8243	.001 203 4	1078.1	1138.2	2.7860
260	.001 246 2	1108.6	1133.5	2.8459	.001 275 5	1190.7	1229.0	2.9986	.001 241 5	1167.2	1229.3	2.9537
280	.001 296 5	1204.7	1230.6	3.0248	.001 330 4	1287.9	1327.8	3.1741	.001 286 0	1258.7	1323.0	3.1200
300	.001 359 6	1306.1	1333.3	3.2071	.001 399 7	1390.7	1432.7	3.3539	.001 338 8	1353.3	1420.2	3.2868
320	.001 443 7	1415.7	1444.6	3.3979	.001 492 0	1501.7	1546.5	3.5426	.001 403 2	1452.0	1522.1	3.4557
340	.001 568 4	1539.7	1571.0	3.6075	.001 626 5	1626.6	1675.4	3.7494	.001 483 8	1556.0	1630.2	3.6291
360	.001 822 6	1702.8	1739.3	3.8772	.001 869 1	1781.4	1837.5	4.0012	.001 588 4	1667.2	1746.6	3.8101
380												

**TABLE A.2**  
Variables thermodynamiques de l'ammoniac<sup>a</sup>

**TABLE A.2.1**

Ammoniac saturé

Temp. °C	Pres. abs kPa <i>P</i>	Volume massique m <sup>3</sup> /kg			Enthalpie kJ/kg			Entropie kJ/kg·K	
		Liquide sat. <i>v<sub>f</sub></i>	Évap. <i>v<sub>fg</sub></i>	Vapeur sat. <i>v<sub>g</sub></i>	Liquide sat. <i>h<sub>f</sub></i>	Évap. <i>h<sub>fg</sub></i>	Vapeur sat. <i>h<sub>g</sub></i>	Liquide sat. <i>s<sub>f</sub></i>	Vapeur sat. <i>s<sub>g</sub></i>
50	40.88	0.001 424	2.6239	2.6254	44.3	1416.7	1372.4	0.1942	6.3502
48	45.96	0.001 429	2.3518	2.3533	-35.5	1411.3	1375.8	0.1547	6.2696
-46	51.55	0.001 434	2.1126	2.1140	26.6	1405.8	1379.2	0.1156	6.1902
-44	57.69	0.001 439	1.9018	1.9032	17.8	1400.3	1382.5	-0.0768	6.0352
42	64.42	0.001 444	1.7155	1.7170	-8.9	1394.7	1385.8	0.0382	6.0349
-40	71.77	0.001 449	1.5506	1.5521	0.0	1389.0	1389.0	0.0000	5.9589
-38	79.80	0.001 454	1.4043	1.4058	8.9	1383.3	1392.2	0.1380	5.9220
36	88.54	0.001 460	1.2742	1.2757	17.8	1377.6	1395.4	0.0757	5.8858
-34	98.05	0.001 465	1.1582	1.1597	26.8	1371.8	1398.5	0.1132	5.8504
-32	108.37	0.001 470	1.0547	1.0562	35.7	1365.9	1401.6	0.1504	5.8156
30	119.55	0.001 476	0.9621	0.9635	44.7	1360.0	1404.6	0.1873	5.7815
28	131.64	0.001 481	0.8790	0.8805	53.6	1354.0	1407.6	0.2240	5.7481
26	144.70	0.001 487	0.8044	0.8059	62.6	1347.9	1410.5	0.2605	5.7153
-24	158.78	0.001 492	0.7373	0.7388	71.6	1341.8	1413.4	0.2967	5.6831
22	173.93	0.001 498	0.6768	0.6783	80.7	1335.6	1416.2	0.3327	5.6515
-20	190.22	0.001 504	0.6222	0.6237	89.7	1329.3	1419.0	0.3684	5.6205
-18	207.71	0.001 510	0.5728	0.5743	98.8	1322.9	1421.7	0.4040	5.5900
16	226.45	0.001 515	0.5280	0.5296	107.8	1316.5	1424.4	0.4393	5.5600
14	246.51	0.001 521	0.4874	0.4889	116.9	1310.0	1427.0	0.4744	5.5305
12	267.95	0.001 528	0.4505	0.4520	126.0	1303.5	1429.5	0.5093	5.5015

TABLE A.2.1

Ammoniac saturé

Temp. °C	Pres abs. kPa P	Volume massique m <sup>3</sup> /kg			Enthalpie kJ/kg			Entropie kJ/kg·K		
		Liquide sat ρ <sub>f</sub>	Évap. ρ <sub>fg</sub>	Vapeur sat ρ <sub>g</sub>	Liquide sat h <sub>f</sub>	Évap. h <sub>fg</sub>	Vapeur sat h <sub>g</sub>	Liquide sat. s <sub>f</sub>	Évap. s <sub>fg</sub>	Vapeur sat s <sub>g</sub>
10	290,85	0,001 514	0,4169	0,4185	135,2	1296,8	1432,0	0,5440	4,9290	5,4730
-8	315,25	0,001 540	0,3863	0,3878	144,3	1290,1	1434,4	0,5785	4,8664	5,4449
6	341,25	0,001 546	0,3583	0,3599	153,5	1283,3	1436,8	0,6128	4,8045	5,4173
-4	368,90	0,001 553	0,3328	0,3343	162,7	1276,4	1439,1	0,6469	4,7432	5,3901
2	398,27	0,001 559	0,3094	0,3109	171,9	1269,4	1441,3	0,6808	4,6825	5,3633
0	429,44	0,001 566	0,2879	0,2895	181,1	1262,4	1443,5	0,7145	4,6223	5,3369
2	462,49	0,001 573	0,2683	0,2698	190,4	1255,2	1445,6	0,7481	4,5627	5,3108
4	497,49	0,001 580	0,2502	0,2517	199,6	1248,0	1447,6	0,7815	4,5037	5,2852
6	534,51	0,001 587	0,2335	0,2351	208,9	1240,6	1449,6	0,8148	4,4451	5,2599
8	573,64	0,001 594	0,2182	0,2198	218,3	1233,2	1451,5	0,8479	4,3871	5,2350
10	614,95	0,001 601	0,2040	0,2056	227,6	1225,7	1453,3	0,8808	4,3295	5,2104
12	658,52	0,001 608	0,1910	0,1926	237,0	1218,1	1455,1	0,9136	4,2725	5,1861
14	704,44	0,001 615	0,1789	0,1805	- 246,4	1210,4	1456,8	0,9463	4,2159	5,1624
16	752,79	0,001 623	0,1677	0,1693	255,9	1202,6	1458,5	0,9788	4,1597	5,1385
18	803,66	0,001 631	0,1574	0,1590	265,4	1194,7	1460,0	1,0112	4,1039	5,1151
20	857,12	0,001 639	0,1477	0,1494	274,9	1186,7	1461,5	1,0434	4,0486	5,0920
22	913,27	0,001 647	0,1388	0,1405	284,4	1178,5	1462,9	1,0755	3,9937	5,0692
24	972,19	0,001 655	0,1305	0,1322	294,0	1170,3	1464,3	1,1075	3,9392	5,0467
26	1033,97	0,001 663	0,1228	0,1245	303,6	1162,0	1465,6	1,1394	3,8850	5,0244
28	1098,71	0,001 671	0,1156	0,1173	313,2	1153,6	1466,8	1,1711	3,8312	5,0023
30	1166,49	0,001 680	0,1089	0,1106	322,9	1145,0	1467,9	1,2028	3,7777	4,9805
32	1237,41	0,001 689	0,1027	0,1044	332,6	1136,4	1469,0	1,2343	3,7246	4,9589
34	1311,55	0,001 698	0,0969	0,0986	342,3	1127,6	1469,9	1,2656	3,6718	4,9374
36	1389,03	0,001 707	0,0914	0,0931	352,1	1118,7	1470,8	1,2969	3,6192	4,9161
38	1469,92	0,001 716	0,0863	0,0880	361,9	1109,7	1471,5	1,3281	3,5669	4,8950
40	1554,33	0,001 726	0,0815	0,0833	371,7	1100,5	1472,2	1,3591	3,5148	4,8740
42	1642,35	0,001 735	0,0771	0,0788	381,6	1091,2	1472,8	1,3901	3,4630	4,8530
44	1734,09	0,001 745	0,0728	0,0746	391,5	1081,7	1473,2	1,4209	3,4112	4,8322
46	1829,65	0,001 756	0,0689	0,0707	401,5	1072,0	1473,5	1,4518	3,3595	4,8113
48	1929,13	0,001 766	0,0652	0,0669	411,5	1062,2	1473,7	1,4826	3,3079	4,7905
50	2032,62	0,001 777	0,0617	0,0635	421,7	1052,0	1473,7	1,5135	3,256	4,7696

\* Adaptation de National Bureau of Standards Circular No. 142, *Tables of Thermodynamic Properties of Ammonia*.

TABLE A.2.2  
Ammoniac surchauffé

Pres. abs. kPa		Temperature, °C											
(Temp. de sat.)		-20	-10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	100
50 (-46.54) s	v	2.4474	2.5481	2.6482	2.7479	2.8473	2.9464	3.0453	3.1441	3.2427	3.3413	3.4397	
	h	1435.8	1457.0	1478.1	1499.2	1520.4	1541.7	1563.0	1584.5	1606.1	1627.8	1649.7	
75 (-39.18) s	v	6.3256	6.4077	6.4865	6.5625	6.6360	6.7073	6.7766	6.8441	6.9099	6.9743	7.0372	
	h												
100 (-33.61) s	v	1.6233	1.6915	1.7591	1.8263	1.8932	1.9597	2.0261	2.0923	2.1584	2.2244	2.2903	
	h	1433.0	1454.7	1476.1	1497.5	1518.9	1540.3	1561.8	1583.4	1605.1	1626.9	1648.9	
125 (-29.08) s	v	6.1190	6.2028	6.2828	6.3597	6.4339	6.5058	6.5756	6.6434	6.7096	6.7742	6.8373	
	h												
150 (-25.23) s	v	1.2110	1.2631	1.3145	1.3654	1.4160	1.4664	1.5165	1.5664	1.6163	1.6659	1.7155	1.8145
	h	1430.1	1452.2	1474.1	1495.7	1517.3	1538.9	1560.5	1582.2	1604.1	1626.0	1648.0	1692.6
	v	5.9695	6.0552	6.1366	6.2144	6.2894	6.3618	6.4321	6.5003	6.5668	6.6316	6.6950	6.8177
	h												
	v	0.9635	1.0059	1.0476	1.0889	1.1297	1.1703	1.2107	1.2509	1.2909	1.3309	1.3707	1.4501
	h	1427.2	1449.5	1472.0	1493.9	1515.7	1537.5	1559.3	1581.1	1603.0	1625.0	1647.2	1691.8
	v	5.8512	5.9389	6.0217	6.1006	6.1763	6.2494	6.3201	6.3887	6.4555	6.5206	6.5842	6.7072
	h												
	v	0.7984	0.8344	0.8697	0.9045	0.9388	0.9729	1.0068	1.0405	1.0740	1.1074	1.1408	1.2072
	h	1424.1	1447.3	1469.8	1492.1	1514.1	1536.1	1558.0	1580.0	1602.0	1624.1	1646.3	1691.1
	v	5.7526	5.8424	5.9266	6.0066	6.0831	6.1568	6.2280	6.2970	6.3641	6.4295	6.4933	6.6167
	h												

TABLE A.2.2  
Ammoniac surchauffé

Pres abs. kPa		Température, °C											
(Temp. de sat.)		-20	10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	100
°C													
200 ( 18.86)	<i>v</i>	0.6199	0.6471	0.6738	0.7001	0.7261	0.7519	0.7774	0.8029	0.8282	0.8533	0.8785	0.9035
	<i>h</i>	1442.0	1465.5	1488.4	1510.9	1533.2	1555.5	1577.7	1599.9	1622.2	1644.6	1667.0	1689.6
	<i>s</i>	5.6863	5.7737	5.8559	5.9342	6.0091	6.0813	6.1512	6.2189	6.2849	6.3491	6.4132	6.4732
250 (-13.67)	<i>v</i>	0.4910	0.5135	0.5354	0.5568	0.5780	0.5989	0.6196	0.6401	0.6605	0.6809	0.7012	0.7212
	<i>h</i>	1436.6	1461.0	1484.5	1507.6	1530.3	1552.9	1575.4	1597.8	1620.3	1642.8	1665.2	1687.6
	<i>s</i>	5.5609	5.6517	5.7365	5.8165	5.8928	5.9661	6.0368	6.1052	6.1717	6.2365	6.3013	6.3613
300 (-9.23)	<i>v</i>	0.4243	0.4430	0.4613	0.4792	0.4968	0.5143	0.5316	0.5488	0.5658	0.5828	0.5997	0.6165
	<i>h</i>	1456.3	1480.6	1504.2	1527.4	1550.3	1573.0	1595.7	1618.4	1641.1	1663.8	1686.5	1709.2
	<i>s</i>	5.5493	5.6366	5.7186	5.7963	5.8707	5.9423	6.0114	6.0785	6.1437	6.2085	6.2733	6.3381
350 ( -5.35)	<i>v</i>	0.3605	0.3770	0.3929	0.4086	0.4239	0.4391	0.4541	0.4689	0.4837	0.4985	0.5132	0.5279
	<i>h</i>	1451.5	1476.5	1500.7	1524.4	1547.6	1570.7	1593.6	1616.5	1639.3	1662.2	1685.0	1707.8
	<i>s</i>	5.4600	5.5502	5.6342	5.7135	5.7890	5.8615	5.9314	5.9990	6.0647	6.1295	6.1943	6.2591
400 ( -1.89)	<i>v</i>	0.3125	0.3274	0.3417	0.3556	0.3692	0.3826	0.3959	0.4090	0.4220	0.4350	0.4478	0.4606
	<i>h</i>	1446.5	1472.4	1497.2	1521.3	1544.9	1568.3	1591.5	1614.5	1637.6	1660.7	1683.7	1706.7
	<i>s</i>	5.3803	5.4735	5.5597	5.6405	5.7173	5.7907	5.8613	5.9296	6.0000	6.0685	6.1359	6.2033
450 (1.26)	<i>v</i>	0.2752	0.2887	0.3017	0.3143	0.3266	0.3387	0.3506	0.3624	0.3740	0.3858	0.3971	0.4085
	<i>h</i>	1441.3	1468.1	1493.6	1518.2	1542.2	1565.9	1589.3	1612.6	1635.8	1659.0	1682.2	1705.4
	<i>s</i>	5.3078	5.4042	5.4926	5.5752	5.6532	5.7275	5.7989	5.8678	5.9345	6.0000	6.0643	6.1285

TABLE A.2.2 (suite)  
Ammoniac surchauffé

Pres. abs. kPa (Temp. de sat.) °C	Température, °C											
	20	30	40	50	60	70	80	100	120	140	160	180
500 (4.14)	<i>v</i>	0.2698	0.2813	0.2926	0.3036	0.3144	0.3251	0.3357	0.3565	0.3771	0.3975	
	<i>h</i>	1489.9	1515.0	1539.5	1563.4	1587.1	1610.6	1634.0	1680.7	1727.5	1774.7	
	<i>s</i>	5.4314	5.5157	5.5950	5.6704	5.7425	5.8120	5.8793	6.0079	6.1301	6.2472	
600 (9.29)	<i>v</i>	0.2217	0.2317	0.2414	0.2508	0.2600	0.2691	0.2781	0.2957	0.3130	0.3302	
	<i>h</i>	1482.4	1508.6	1533.8	1558.5	1582.7	1606.6	1630.4	1677.7	1724.9	1772.4	
	<i>s</i>	5.3222	5.4102	5.4923	5.5697	5.6436	5.7144	5.7826	5.9129	6.0363	6.1541	
700 (13.81)	<i>v</i>	0.1874	0.1963	0.2048	0.2131	0.2212	0.2291	0.2369	0.2522	0.2672	0.2821	
	<i>h</i>	1474.5	1501.9	1528.1	1553.4	1578.2	1602.6	1626.8	1674.6	1722.4	1770.2	
	<i>s</i>	5.2259	5.3179	5.4029	5.4826	5.5582	5.6303	5.6997	5.8316	5.9562	6.0749	
800 (17.86)	<i>v</i>	0.1615	0.1696	0.1773	0.1848	0.1920	0.1991	0.2060	0.2196	0.2329	0.2459	0.2589
	<i>h</i>	1466.3	1495.0	1522.2	1548.3	1573.7	1598.6	1623.1	1671.6	1719.8	1768.0	1816.4
	<i>s</i>	5.1387	5.2351	5.3232	5.4053	5.4827	5.5562	5.6268	5.7603	5.8861	6.0057	6.1202
900 (21.54)	<i>v</i>		0.1488	0.1559	0.1627	0.1693	0.1757	0.1820	0.1942	0.2061	0.2178	0.2294
	<i>h</i>		1488.0	1516.2	1543.0	1569.1	1594.4	1619.4	1668.5	1717.1	1765.7	1814.4
	<i>s</i>		5.1593	5.2508	5.3354	5.4147	5.4897	5.5614	5.6968	5.8237	5.9442	6.0594

TABLE A.2.2 (suite)  
Ammoniac surchauffé

Pres, abs. kPa		Température, °C											
Temp. de sat.)		20	30	40	50	60	70	80	100	120	140	160	180
°C													
1000 (24.91)	v	0.1321	0.1388	0.1450	0.1511	0.1570	0.1627	0.1679	0.1739	0.1847	0.1954	0.2058	0.2162
	h	1480.6	1510.0	1537.7	1564.4	1590.3	1615.6	1645.4	1665.4	1714.5	1763.4	1812.4	1861.7
	s	5.0889	5.1840	5.2713	5.3525	5.4299	5.5021	5.5692	5.6392	5.7674	5.8888	6.0047	6.1159
1200 (30.96)	v	0.1129	0.1185	0.1238	0.1289	0.1338	0.1388	0.1434	0.1484	0.1526	0.1616	0.1705	0.1792
	h	1497.1	1526.6	1554.7	1581.7	1608.0	1639.2	1659.2	1679.2	1709.2	1758.9	1808.5	1858.2
	s	5.0629	5.1560	5.2416	5.3215	5.3970	5.4687	5.5379	5.6087	5.7919	5.9091	6.0214	6.1214
1400 (36.28)	v	0.0944	0.0995	0.1042	0.1088	0.1132	0.1176	0.1216	0.1263	0.1297	0.1376	0.1452	0.1528
	h	1483.4	1515.1	1544.7	1573.0	1600.2	1634.3	1652.8	1673.9	1703.9	1754.3	1804.5	1854.7
	s	4.9534	5.0530	5.1434	5.2270	5.3053	5.3787	5.4501	5.5836	5.7087	5.8273	5.9406	6.0406
1600 (41.05)	v	0.0851	0.0895	0.0937	0.0977	0.1013	0.1053	0.1093	0.1133	0.1173	0.1263	0.1330	0.1390
	h	1502.9	1534.4	1564.0	1592.3	1620.2	1646.4	1671.8	1698.5	1729.7	1790.5	1851.2	1911.2
	s	4.9584	5.0543	5.1419	5.2232	5.2987	5.3722	5.4436	5.5084	5.6355	5.7555	5.8699	5.9699
1800 (45.39)	v	0.0739	0.0781	0.0820	0.0856	0.0892	0.0926	0.0960	0.0992	0.1025	0.1116	0.1177	0.1237
	h	1490.0	1523.5	1554.6	1584.1	1613.1	1641.8	1669.8	1693.1	1745.1	1796.5	1847.7	1897.7
	s	4.8693	4.9715	5.0635	5.1482	5.2265	5.3018	5.3722	5.4409	5.5699	5.6914	5.8069	5.9069
2000 (49.38)	v	0.0648	0.0688	0.0725	0.0760	0.0792	0.0824	0.0855	0.0885	0.0915	0.0943	0.0999	0.1054
	h	1476.1	1512.0	1544.9	1575.6	1605.2	1633.2	1660.2	1687.6	1740.4	1792.4	1844.1	1894.1
	s	4.7834	4.8930	4.9902	5.0786	5.1609	5.2371	5.3124	5.3793	5.5104	5.6333	5.7499	5.8499



TABLE A-11

Saturated refrigerant-134a—Temperature table

Temp., T, °C	Press., P, MPa	Specific volume, m <sup>3</sup> /kg		Internal energy, kJ/kg		Enthalpy, kJ/kg			Entropy, kJ/kg·K	
		Sat. liquid, v <sub>f</sub>	Sat. vapor, v <sub>g</sub>	Sat. liquid, u <sub>f</sub>	Sat. vapor, u <sub>g</sub>	Sat. liquid, h <sub>f</sub>	Evap., h <sub>fg</sub>	Sat. vapor, h <sub>g</sub>	Sat. liquid, s <sub>f</sub>	Sat. vapor, s <sub>g</sub>
-40	0.05164	0.0007055	0.3569	-0.04	204.45	0.00	222.68	222.68	0.0000	0.9560
-38	0.06332	0.0007113	0.2947	4.68	206.73	4.73	220.67	225.40	0.0201	0.9506
-36	0.07704	0.0007172	0.2451	9.47	209.01	9.52	218.37	227.90	0.0401	0.9456
-34	0.09305	0.0007233	0.2052	14.31	211.29	14.37	216.01	230.38	0.0600	0.9411
-32	0.10198	0.0007285	0.1822	18.75	212.43	18.82	214.80	231.62	0.0699	0.9380
-30	0.11180	0.0007296	0.1728	19.21	213.57	19.29	213.57	232.85	0.0796	0.9370
-28	0.12192	0.0007328	0.1580	21.68	214.70	21.77	212.32	234.08	0.0897	0.9351
-26	0.13299	0.0007361	0.1464	24.17	215.84	24.26	211.05	235.31	0.0996	0.9332
-24	0.14483	0.0007395	0.1350	26.67	216.97	26.77	209.76	236.53	0.1094	0.9315
-22	0.15748	0.0007428	0.1247	29.18	218.10	29.30	208.45	237.74	0.1192	0.9298
-20	0.18540	0.0007498	0.1068	34.25	220.38	34.39	205.77	240.15	0.1388	0.9267
-18	0.21704	0.0007589	0.0919	39.38	222.60	39.54	203.00	242.54	0.1583	0.9239
-16	0.25274	0.0007644	0.0794	44.56	224.84	44.75	200.15	244.90	0.1777	0.9213
-14	0.29282	0.0007721	0.0689	49.79	227.06	50.02	197.21	247.23	0.1970	0.9190
-12	0.33786	0.0007801	0.0600	55.08	229.27	55.35	194.19	249.53	0.2162	0.9169
-10	0.38758	0.0007884	0.0525	60.43	231.46	60.73	191.07	251.80	0.2354	0.9150
-8	0.44294	0.0007971	0.0460	65.83	233.63	66.18	187.85	254.03	0.2545	0.9132
-6	0.50418	0.0008062	0.0405	71.29	235.78	71.69	184.52	256.22	0.2735	0.9116
-4	0.57160	0.0008157	0.0358	76.80	237.91	77.26	181.08	258.35	0.2924	0.9102
-2	0.64568	0.0008257	0.0317	82.37	240.01	82.90	177.55	260.45	0.3113	0.9089
0	0.68530	0.0008309	0.0298	85.18	241.06	85.75	175.73	261.48	0.3208	0.9082
2	0.72675	0.0008362	0.0281	88.00	242.08	88.61	173.89	262.50	0.3302	0.9076
4	0.77008	0.0008417	0.0265	90.84	243.10	91.49	172.00	263.50	0.3396	0.9070
6	0.81528	0.0008473	0.0250	93.70	244.12	94.39	170.09	264.48	0.3490	0.9064
8	0.86247	0.0008530	0.0236	96.58	245.12	97.31	168.14	265.45	0.3584	0.9058
10	0.91168	0.0008590	0.0223	99.47	246.11	100.25	166.15	266.40	0.3678	0.9053
12	0.96298	0.0008651	0.0210	102.38	247.09	103.21	164.12	267.33	0.3772	0.9047
14	1.0164	0.0008714	0.0199	105.30	248.06	106.19	162.05	268.24	0.3866	0.9041
16	1.0720	0.0008780	0.0188	108.25	249.02	109.19	159.94	269.14	0.3960	0.9035
18	1.1299	0.0008847	0.0177	111.22	249.96	112.22	157.79	270.01	0.4054	0.9030
20	1.1926	0.0008909	0.0159	117.22	251.79	118.35	153.33	271.68	0.4243	0.9017
22	1.2611	0.0009142	0.0142	123.31	253.55	124.58	148.66	273.24	0.4432	0.9004
24	1.3278	0.0009308	0.0127	129.51	255.23	130.83	143.75	274.68	0.4622	0.8990
26	1.3813	0.0009488	0.0114	135.82	256.81	137.42	138.57	275.99	0.4814	0.8973
28	2.1182	0.0010027	0.0088	152.22	260.15	154.34	124.08	278.43	0.5302	0.8918
30	2.6324	0.0010788	0.0064	169.88	262.14	172.71	106.41	279.12	0.5814	0.8827
32	3.2435	0.0011949	0.0048	189.82	261.34	193.69	82.63	276.32	0.6380	0.8655
34	3.9742	0.0015443	0.0027	218.60	248.49	224.74	34.40	259.13	0.7196	0.8117

Source for Tables A-8 through A-10 is J. Moran and H. N. Shapiro, *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, 2nd ed. (New York: John Wiley & Sons, 1992), pp. 710–5. Originally based on equations from C. P. Wilson and R. S. Basu, "Thermodynamic Properties of a New Stratospherically Safe Working Fluid—Refrigerant-134a," *ASHRAE Trans.* 94, Pt. 2, 1986, pp. 2085–8. Used with permission.

TABLE A-12

Saturated refrigerant-134a—Pressure table

Press., P, MPa	Temp., T <sub>sat</sub> , °C	Specific volume, m <sup>3</sup> /kg		Internal energy, kJ/kg		Enthalpy, kJ/kg			Entropy, kJ/kg·K	
		Sat. liquid, v <sub>f</sub>	Sat. vapor, v <sub>g</sub>	Sat. liquid, u <sub>f</sub>	Sat. vapor, u <sub>g</sub>	Sat. liquid, h <sub>f</sub>	Evap., h <sub>fg</sub>	Sat. vapor, h <sub>g</sub>	Sat. liquid, s <sub>f</sub>	Sat. vapor, s <sub>g</sub>
0.08	37.07	0.0007087	0.3100	3.41	206.12	3.46	221.27	224.72	0.0147	0.9620
0.08	-31.21	0.0007184	0.2366	10.41	208.46	10.47	217.92	228.39	0.0440	0.9447
0.10	-26.43	0.0007258	0.2917	16.22	212.18	16.28	215.06	231.35	0.0679	0.9395
0.12	-22.36	0.0007323	0.1614	21.23	214.50	21.32	212.54	233.86	0.0879	0.9354
0.14	-18.80	0.0007381	0.1396	25.66	216.52	25.77	210.27	236.04	0.1055	0.9322
0.16	-15.62	0.0007435	0.1229	29.68	218.32	29.78	208.18	237.97	0.121	0.9295
0.18	-12.73	0.0007485	0.1098	33.31	219.94	33.45	206.26	239.71	0.1352	0.9273
0.20	-10.09	0.0007532	0.0993	36.69	221.43	36.84	204.48	241.30	0.1481	0.9253
0.24	-5.37	0.0007618	0.0834	42.77	224.07	42.95	201.14	244.09	0.1710	0.9222
0.26	-1.23	0.0007697	0.0719	48.18	226.38	48.39	198.13	246.52	0.1911	0.9197
0.32	2.48	0.0007770	0.0632	53.06	228.43	53.31	195.35	248.66	0.2089	0.9177
0.36	5.84	0.0007839	0.0564	57.54	230.28	57.82	192.76	250.58	0.2251	0.9160
0.4	8.93	0.0007904	0.0509	61.89	231.97	62.00	190.32	252.32	0.2399	0.9145
0.5	15.74	0.0008066	0.0409	70.03	235.64	71.33	184.74	256.07	0.2723	0.9117
0.6	21.58	0.0008196	0.0341	78.99	238.74	79.48	179.71	259.19	0.2889	0.9097
0.7	26.72	0.0008328	0.0292	88.19	241.42	88.78	175.07	261.85	0.3242	0.9080
0.8	31.33	0.0008454	0.0255	92.75	243.78	93.42	170.73	264.15	0.3459	0.9068
0.9	35.53	0.0008576	0.0228	98.79	245.88	99.56	166.82	266.18	0.3656	0.9054
1.0	39.39	0.0008695	0.0202	104.42	247.77	105.29	162.68	267.97	0.3838	0.9043
1.2	46.32	0.0008828	0.0166	114.69	251.03	115.76	155.23	270.99	0.4164	0.9023
1.4	52.43	0.0009159	0.0140	123.98	253.74	125.28	148.14	273.40	0.4453	0.9003
1.6	57.92	0.0009392	0.0121	132.52	256.00	134.02	141.31	275.33	0.4714	0.8982
1.8	62.91	0.0009631	0.0105	140.48	257.88	142.22	134.60	276.83	0.4954	0.8959
2.0	67.49	0.0009878	0.0093	148.02	259.41	149.99	127.95	277.94	0.5178	0.8934
2.5	77.59	0.0010662	0.0069	165.48	261.84	168.12	111.06	279.17	0.5687	0.8854
3.0	88.22	0.0011416	0.0053	181.88	262.16	185.30	92.71	278.01	0.6156	0.8735

TABLE A-13

Superheated refrigerant-134a

T °C	v m³/kg	u kJ/kg	h kJ/kg	s kJ/(kg·K)	v m³/kg	u kJ/kg	h kJ/kg	s kJ/(kg·K)	v m³/kg	u kJ/kg	h kJ/kg	s kJ/(kg·K)
P = 0.08 MPa (T <sub>sat</sub> = -27.07°C)				P = 0.10 MPa (T <sub>sat</sub> = -28.43°C)				P = 0.14 MPa (T <sub>sat</sub> = -18.80°C)				
Sat.	0.31003	208.12	224.72	0.9520	0.18170	212.16	231.35	0.9365	0.13945	218.52	238.04	0.9322
-20	0.33536	217.86	237.98	1.0062	0.18770	216.77	236.34	0.9802	0.14549	223.03	243.40	0.9808
-10	0.34992	224.97	245.96	1.0371	0.20888	224.01	244.70	0.9918	0.14549	223.03	243.40	0.9808
0	0.36433	232.24	254.10	1.0875	0.21587	231.41	252.86	1.0227	0.15219	230.55	251.88	0.9922
10	0.37861	239.68	262.41	1.0873	0.22473	238.96	261.43	1.0531	0.15875	238.21	260.43	1.0230
20	0.39279	247.32	270.88	1.1267	0.23348	246.67	270.02	1.0828	0.16520	246.01	269.13	1.0532
30	0.40688	255.12	279.53	1.1557	0.24218	254.64	278.76	1.1122	0.17156	253.98	277.97	1.0828
40	0.42091	263.10	288.35	1.1844	0.25078	262.58	287.86	1.1411	0.17783	262.08	286.96	1.1120
50	0.43487	271.25	297.34	1.2126	0.25930	270.79	296.72	1.1696	0.18404	270.32	296.08	1.1407
60	0.44879	279.58	306.51	1.2405	0.26779	279.18	305.94	1.1977	0.19020	278.74	305.37	1.1690
70	0.46266	288.08	315.84	1.2681	0.27623	287.70	315.32	1.2254	0.19633	287.32	314.80	1.1969
80	0.47650	296.75	325.34	1.2954	0.28464	296.40	324.87	1.2528	0.20241	296.08	324.38	1.2244
90	0.49031	305.58	335.00	1.3224	0.29302	305.27	334.57	1.2799	0.20846	304.95	334.14	1.2516
100									0.21449	314.01	344.04	1.2785
P = 0.18 MPa (T <sub>sat</sub> = -13.73°C)				P = 0.26 MPa (T <sub>sat</sub> = -10.09°C)				P = 0.34 MPa (T <sub>sat</sub> = -8.37°C)				
Sat.	0.10983	219.94	239.71	0.9273	0.09933	221.43	241.30	0.9253	0.08343	224.07	244.08	0.9222
-10	0.11135	222.02	242.06	0.9362	0.09938	221.50	241.38	0.9256	0.08574	228.31	248.88	0.9398
0	0.1878	229.67	250.89	0.9884	0.10438	229.23	250.10	0.9582	0.08993	238.26	257.84	0.9721
10	0.2207	237.44	258.41	0.9980	0.10922	237.05	256.89	0.9886	0.09339	244.30	266.85	1.0034
20	0.2723	245.33	268.23	1.0304	0.11394	244.99	267.78	1.0206	0.09794	252.45	275.95	1.0339
30	0.3230	253.36	277.17	1.0604	0.11856	253.06	276.77	1.0508	0.10181	260.72	285.81	1.0637
40	0.3730	261.53	286.24	1.0898	0.12311	261.26	285.88	1.0804	0.10562	269.12	294.47	1.0930
50	0.4222	269.85	295.45	1.1187	0.12758	269.61	295.12	1.1094	0.10937	277.67	303.91	1.1218
60	0.4710	278.31	304.79	1.1472	0.13201	278.10	304.50	1.1380	0.11307	286.35	313.48	1.1501
70	0.5193	286.80	314.28	1.1753	0.13638	286.74	314.02	1.1661	0.11674	295.81	323.18	1.1780
80	0.5672	295.7	323.92	1.2030	0.14073	295.53	323.88	1.1939	0.12037	304.15	333.04	1.2055
90	0.6148	304.83	333.70	1.2303	0.14504	304.47	333.48	1.2212	0.12398	313.27	343.03	1.2326
100	0.6622	313.72	343.63	1.2573	0.14932	313.57	343.43	1.2483				
P = 0.38 MPa (T <sub>sat</sub> = -1.33°C)				P = 0.52 MPa (T <sub>sat</sub> = 2.48°C)				P = 0.68 MPa (T <sub>sat</sub> = 8.83°C)				
Sat.	0.07183	226.38	246.52	0.9187	0.06322	228.43	248.86	0.9177	0.05088	231.97	252.32	0.9145
0	0.07240	227.37	247.84	0.9238	0.06579	234.81	255.85	0.9427	0.0519	232.87	253.35	0.9182
10	0.07613	235.44	256.76	0.9568	0.06901	242.87	264.95	0.9748	0.05397	241.37	262.98	0.9615
20	0.07972	243.58	265.91	0.9883	0.07214	251.18	274.28	1.0062	0.05582	249.88	272.54	0.9837
30	0.08320	251.83	275.12	1.0192	0.07518	259.61	283.87	1.0367	0.05817	258.47	282.14	1.0148
40	0.08660	260.7	284.42	1.0494	0.07815	268.14	293.15	1.0665	0.06164	267.3	291.79	1.0452
50	0.08992	269.84	293.81	1.0788	0.08108	276.79	302.72	1.0957	0.06405	275.89	301.51	1.0748
60	0.09319	277.23	303.32	1.1078	0.08392	285.56	312.41	1.1243	0.06641	284.75	311.32	1.1036
70	0.09641	285.98	312.95	1.1364	0.08674	294.46	322.22	1.1525	0.06873	293.73	321.23	1.1322
80	0.09960	294.82	322.71	1.1644	0.08953	303.50	332.5	1.1802	0.07102	302.84	331.25	1.1602
90	0.10275	303.83	332.80	1.1920	0.09229	312.66	342.21	1.2076	0.07327	312.07	341.38	1.1878
100	0.10587	312.98	342.62	1.2193	0.09503	322.00	352.40	1.2345	0.07550	321.44	351.64	1.2149
110	0.10897	322.27	352.78	1.2461	0.09774	331.45	362.73	1.2611	0.07777	330.94	362.03	1.2417
120	0.11205	331.71	363.08	1.2727					0.07991	340.58	372.54	1.2681
130									0.08208	350.35	383.81	1.2941
140												

TABLE A-13

Superheated refrigerant-134a (Continued)

$T$	$v$ m <sup>3</sup> /kg	$u$ kJ/kg	$h$ kJ/kg	$s$ kJ/kg·K	$v$ m <sup>3</sup> /kg	$u$ kJ/kg	$h$ kJ/kg	$s$ kJ/kg·K	$v$ m <sup>3</sup> /kg	$u$ kJ/kg	$h$ kJ/kg	$s$ kJ/kg·K		
$P = 0.08 \text{ MPa } (T_{\text{sat}} = 15.74^\circ\text{C})$					$P = 0.09 \text{ MPa } (T_{\text{sat}} = 17.50^\circ\text{C})$					$P = 0.10 \text{ MPa } (T_{\text{sat}} = 19.72^\circ\text{C})$				
Sat.	0.04086	253.84	258.07	0.9177	0.03406	238.74	258.10	0.9067	0.02914	247.47	261.86	0.9080		
20	0.04186	239.40	260.34	0.9264										
30	0.04416	246.20	270.78	0.9367	0.03581	246.41	267.49	0.9368	0.03379	244.33	263.37	0.9187		
40	0.04633	256.99	280.18	0.9484	0.03774	255.45	278.08	0.9719	0.03157	253.83	273.80	0.9579		
50	0.04842	265.83	290.04	1.0229	0.03958	264.48	288.23	1.0037	0.03324	263.08	284.36	0.9987		
60	0.05043	274.73	299.86	1.0531	0.04134	273.54	298.38	1.0348	0.03482	272.31	295.89	1.0182		
70	0.05240	283.72	309.62	1.0825	0.04304	282.66	308.48	1.0643	0.03634	281.57	307.01	1.0487		
80	0.05432	292.80	319.86	1.1114	0.04469	291.86	318.67	1.0938	0.03781	290.84	317.35	1.0784		
90	0.05620	302.00	330.10	1.1397	0.04631	301.14	328.93	1.225	0.03924	300.27	327.74	1.1074		
100	0.05805	311.31	340.33	1.1675	0.04790	310.53	339.27	1.505	0.04084	309.74	338.18	1.1358		
110	0.05988	320.74	350.58	1.1948	0.04946	320.00	349.70	1.1781	0.04201	319.31	348.71	1.1637		
120	0.06168	330.30	361.14	1.2218	0.05099	329.64	360.24	2.053	0.04335	328.86	359.33	1.1910		
130	0.06347	339.98	371.72	1.2484	0.05251	339.38	370.86	1.2320	0.04468	338.76	370.04	1.2179		
140	0.06524	349.79	382.42	1.2748	0.05402	349.23	381.64	2.584	0.04599	348.86	380.85	1.2444		
150					0.05550	359.21	392.52	1.2844	0.04729	358.88	391.79	1.2708		
160					0.05698	369.32	403.51	3.103	0.04857	368.82	402.82	1.2963		
$P = 0.10 \text{ MPa } (T_{\text{sat}} = 31.32^\circ\text{C})$					$P = 0.15 \text{ MPa } (T_{\text{sat}} = 38.83^\circ\text{C})$					$P = 1.00 \text{ MPa } (T_{\text{sat}} = 39.39^\circ\text{C})$				
Sat.	0.02547	243.78	264.18	0.9088	0.02255	245.88	286.8	0.9054	0.02020	247.77	267.97	0.9043		
40	0.02691	252.3	273.86	0.9374	0.02325	250.32	271.26	0.9217	0.02029	248.38	268.88	0.9088		
50	0.02846	261.62	284.39	0.97	0.02472	260.08	282.34	0.9586	0.02171	254.48	280.19	0.9429		
60	0.02992	270.04	294.96	1.0034	0.02609	269.72	293.21	0.9897	0.02301	268.38	291.38	0.9768		
70	0.03131	280.45	305.50	1.0345	0.02738	279.30	303.94	0.2	0.02423	278.1	302.31	0.083		
80	0.03264	289.88	316.00	1.0647	0.02861	288.87	314.82	1.0571	0.02538	287.82	313.20	1.0406		
90	0.03393	299.37	326.52	1.0940	0.02980	298.46	325.28	1.0818	0.02648	297.53	324.01	1.0707		
100	0.03518	308.93	337.06	1.1227	0.03095	308.1	335.86	1.108	0.02755	307.27	334.82	1.1000		
110	0.03642	318.57	347.71	1.1508	0.03207	317.82	346.68	1.382	0.02868	317.06	345.65	1.288		
120	0.03762	328.31	358.40	1.1784	0.03318	327.62	357.47	1.1670	0.02969	326.83	356.52	1.1587		
130	0.03881	338.4	369.19	1.2055	0.03423	337.52	368.33	1.1943	0.03068	336.88	367.48	1.1841		
140	0.03997	348.09	380.07	1.2321	0.03529	347.51	379.27	1.221	0.03164	346.92	378.46	1.21		
150	0.04113	358.5	391.06	1.2584	0.03633	357.61	390.31	1.2475	0.03250	357.06	389.56	1.2378		
160	0.04227	368.32	402.14	1.2843	0.03736	367.82	401.44	1.2735	0.03344	367.3	400.74	1.2638		
170	0.04340	378.81	413.23	1.3098	0.03838	378.4	412.68	1.2992	0.03438	377.68	412.02	1.2895		
180	0.04452	389.02	424.53	1.3351	0.03939	388.57	424.02	1.3245	0.03528	388.2	423.40	1.3149		
$P = 1.20 \text{ MPa } (T_{\text{sat}} = 46.31^\circ\text{C})$					$P = 1.40 \text{ MPa } (T_{\text{sat}} = 53.83^\circ\text{C})$					$P = 1.60 \text{ MPa } (T_{\text{sat}} = 57.82^\circ\text{C})$				
Sat.	0.01863	257.03	270.99	0.9023	0.01408	263.74	273.40	0.9033	0.01208	256.00	275.33	0.9082		
50	0.01712	254.88	275.52	0.9184										
60	0.01835	265.42	287.44	0.9527	0.01496	262.7	283.10	0.9297	0.01233	258.48	278.20	0.9088		
70	0.01947	275.59	298.86	0.9888	0.01603	272.87	295.31	0.9658	0.01340	268.88	289.33	0.9457		
80	0.02061	285.62	310.24	1.0182	0.01701	283.29	307.10	0.9997	0.01436	280.78	300.74	0.9813		
90	0.02150	295.68	321.38	1.0503	0.01792	293.55	318.83	1.0318	0.01521	291.38	311.72	1.0148		
100	0.02244	305.94	332.47	1.0834	0.01878	303.72	330.02	1.0626	0.01601	301.84	322.40	1.0487		
110	0.02335	316.30	343.52	1.1088	0.01960	313.88	341.32	1.0927	0.01677	312.20	333.04	1.0773		
120	0.02423	325.51	354.58	1.1381	0.02039	324.06	352.98	1.1216	0.01750	322.53	343.53	1.0988		
130	0.02508	334.66	365.88	1.1680	0.02115	334.29	364.88	1.1501	0.01820	332.87	354.88	1.1217		
140	0.02582	345.73	378.63	1.1933	0.02188	344.50	377.15	1.1777	0.01887	343.24	367.44	1.1434		
150	0.02654	356.86	390.04	1.2201	0.02262	354.82	388.49	1.2048	0.01953	353.66	380.91	1.1672		
160	0.02724	368.27	401.53	1.2465	0.02333	365.22	399.88	1.2315	0.02017	364.15	394.43	1.2141		
170	0.02794	378.88	413.70	1.2724	0.02403	375.71	408.38	1.2576	0.02080	374.71	407.99	1.2445		
180	0.02862	389.27	425.16	1.2980	0.02472	386.28	420.90	1.2834	0.02142	385.35	419.62	1.2704		
190					0.02541	396.96	432.53	1.3088	0.02203	396.08	431.33	1.2960		
200					0.02608	407.73	444.24	1.3338	0.02263	406.90	443.1	1.3222		

R-134a

TABLE A.6  
Constantes critiques<sup>a</sup>

Substance	Formule	Masse molaire	Temp. K	Pression MPa	Volume m <sup>3</sup> /kmol
Ammoniac	NH <sub>3</sub>	17.03	405.5	11.28	.0724
Argon	Ar	39.948	151	4.86	.0749
Azote	N <sub>2</sub>	28.013	126.2	3.39	.0899
Brome	Br <sub>2</sub>	159.808	584	10.34	.1355
Chlore	Cl <sub>2</sub>	70.906	417	7.71	.1242
Deutérium (normal)	D <sub>2</sub>	4.00	38.4	1.66	—
Dioxyde de carbone	CO <sub>2</sub>	44.01	304.2	7.39	.0943
Dioxyde de soufre	SO <sub>2</sub>	64.063	430.7	7.88	.1217
Eau	H <sub>2</sub> O	18.015	647.3	22.09	.0568
Hélium	He	4.003	5.3	0.23	.0578
Hélium 3	He	3.00	3.3	0.12	—
Hydrogène (normal)	H <sub>2</sub>	2.016	33.3	1.30	.0649
Krypton	Kr	83.80	209.4	5.50	.0924
Monoxyde de carbone	CO	28.011	133	3.50	.0930
Néon	Ne	20.183	44.5	2.73	.0417
Oxyde nitreux	N <sub>2</sub> O	44.013	309.7	7.27	.0961
Oxygène	O <sub>2</sub>	31.999	154.8	5.08	.0780
Xénon	Xe	131.30	289.8	5.88	.1186
Alcool éthylique	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	46.07	516	6.38	.1673
Alcool méthylique	CH <sub>3</sub> OH	32.042	513.2	7.95	.1180
Benzène	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	78.115	562	4.92	.2603
n-Butane	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	58.124	425.2	3.80	.2547
Chloroforme	CHCl <sub>3</sub>	119.38	536.6	5.47	.2403
Chlorure de méthyle	CH <sub>3</sub> Cl	50.488	416.3	6.68	.1430
Dichlorodifluorométhane	CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	120.91	384.7	4.01	.2179
Dichlorofluorométhane	CHCl <sub>2</sub> F	102.92	451.7	5.17	.1973
Éthane	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	30.070	305.5	4.88	.1480
Éthylène	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	28.054	282.4	5.12	.1242
n-Hexane	C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	86.178	507.9	3.03	.3677
Méthane	CH <sub>4</sub>	16.043	191.1	4.64	.0993
Propane	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	44.097	370	4.26	.1998
Propène	C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	42.081	365	4.62	.1810
Propyne	C <sub>3</sub> H <sub>4</sub>	40.065	401	5.35	—
Tétrachlorure de carbone	CCl <sub>4</sub>	153.82	556.4	4.56	.2759
Trichlorofluorométhane	CCl <sub>3</sub> F	137.37	471.2	4.38	.2478

<sup>a</sup> K. A. Kobe et R. E. Lynn, Jr., *Chem. Rev.*, 52: 117-236 (1953).

TABLE A.7

Propriétés de différents solides et liquides<sup>a</sup>

Solide	$C_p$ , kJ/kg·K	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	Liquide	$C_p$ , kJ/kg·K	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>
Aluminium	0.900	2700	Ammoniaque	4.800	602
Argent	0.235	10 470	Eau	4.184	997
Bois (la plupart)	1.760	350-700	Éthanol	2.456	783
Caoutchouc (mou)	1.840	1100	Fréon-12	0.977	1310
Cuivre	0.386	8900	Huile (légère)	1.800	910
Étain	0.217	5730	Mercure	0.139	13 560
Fer	0.450	7840	Méthanol	2.550	787
Granite	1.017	2700			
Graphite	0.711	2500			
Plomb	0.128	11 310			

<sup>a</sup> Valeurs à 25 °C.

TABLE A.8

Propriétés de différents gaz parfaits<sup>a</sup>

Gaz	Formule chimique	Masse molaire	$R$ , $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$	$C_{p0}$ , $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$	$C_{v0}$ , $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$	$k$
Air	—	28.97	0.287 00	1.0035	0.7165	1.400
Argon	Ar	39.948	0.208 13	0.5203	0.3122	1.667
Azote	N <sub>2</sub>	28.013	0.296 80	1.0416	0.7448	1.400
Butane	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	58.124	0.143 04	1.7164	1.5734	1.091
Dioxyde de carbone	CO <sub>2</sub>	44.01	0.188 92	0.8418	0.6529	1.289
Éthane	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	30.07	0.276 50	1.7662	1.4897	1.186
Éthylène	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	28.054	0.296 37	1.5482	1.2518	1.237
Hélium	He	4.003	2.077 03	5.1926	3.1156	1.667
Hydrogène	H <sub>2</sub>	2.016	4.124 18	14.2091	10.0849	1.409
Méthane	CH <sub>4</sub>	16.04	0.518 35	2.2537	1.7354	1.299
Monoxyde de carbone	CO	28.01	0.296 83	1.0413	0.7445	1.400
Néon	Ne	20.183	0.411 95	1.0299	0.6179	1.667
Octane	C <sub>8</sub> H <sub>18</sub>	114.23	0.072 79	1.7113	1.6385	1.044
Oxygène	O <sub>2</sub>	31.999	0.259 83	0.9216	0.6618	1.393
Propane	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	44.097	0.188 55	1.6794	1.4909	1.126
Vapeur d'eau	H <sub>2</sub> O	18.015	0.461 52	1.8723	1.4108	1.327

<sup>a</sup> ( $C_{p0}$ ,  $C_{v0}$  et  $k$  sont à 300 K.)



2.20\$ 1.98\$  
NOU MEMBRE MEMBRE  
8890-168 Table de correspondance

CLB - 8707100881



01986288482